3. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

3.1. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

3.1.1. Одновимірний закон розподілу Ґавса

1. Нормальний закон розподілу неперервної випадкової величини [скорочене позначення N(a, σ^2)] є основний розподіл і має фундаментальне значення з позиції прикладної математичної статистики під час математичного планування та обробці результатів хемічних та фізико-хемічних експериментів або спостережень, є придатною моделлю для багатьох хемічних, фізичних, фізико-хемічних, біологічних, хеміко-медичних, хеміко-біологічних тощо процесів та явищ, у наслідок чого на доволі загальних умовах розподіл середнього N результатів експерименту або спостереження за $N \to \infty$ прагне до нормального, незалежно від форми вихідного розподіілу.

2. Відомі інші розподіли: χ^2 (хі – квадрат) розподіл Пірсона; **t** – розподіл Стьюдента, F – розподіл Фішера тощо, які пов'язані з нормально розподіленими випадковими величинами функції розподілу.

3. Неперервна випадкова величина (х) має нормальний розподіл Ґавса, якщо відповідна їй щільність ймовірностей розподілу має вигляд:

$$\varphi(x) = \varphi\left(x; a_x; \sigma_x^2\right) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - a_x}{b}\right)^2\right],$$

де a, b – дійсні сталі числа (b>0);

$b = \sigma_x = +\sqrt{\sigma_x^2}$ – ґенеральне середне квадратичне відхилення випадкової величини **x** від її ґенеральної середньої (математичного сподівання) величини.

Математичне сподівання(генеральна середня) випадкової величини визначається так:

$$a_x = \mu_x = a = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$$

Ґенеральна дисперсія визначається так:

$$\sigma_x^2 = E[x - a_x]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a_x)^2 \varphi(x)dx$$

Відповідна щільности ймовірностей розподілу (3.1) функція розподілу випадкової величини **x** має вигляд:

$$p(x;a_x;\sigma_x^2) = p(x) = \int_{-\infty}^{x} p(\xi)d\xi$$

де ξ – змінна інтеґрування;

E – знак математичного сподівання.

4. **Таким чином, одновимірна нормальна щільність ймовірностей** розподілу Ґавса (або просто: нормальна щільність розподілу) неперервної випадкової величини **x**, яка підпорядкована нормальному закону, має вигляд:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a_x}{\sigma_x}\right)^2\right]$$

де $(-\infty < x < +\infty); (\sigma_x > 0)$

$a_x; \sigma_x; \sigma_x^2$ – параметри нормального розподілу.

На рис.3.1. приведений графік щільности ймовірностей розподілу випадкової величини *x* для різних значень математичного сподівання кривої 1, 2, 3: $a_1 = a_2 = a_3$; дисперсії $\sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \sigma_3^2$; кривої 2, 4, 5 : $a_2 < a_4 < a_5; \sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \sigma_3^2$

Функція нормального розподілу (нормальна функція розподілу) неперервної випадкової величини x записується так:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a_x}{\sigma_x}\right)^2\right]dx,$$

На рис.3.2. приведений графік функцій нормального розподілу для різних математичних сподівань та дисперсій.

Ґенеральні числові характеристики випадкової величини, що розподілена за нормальним законом Ґавса дорівнюють:

- математичне сподівання (генеральне середнє)

$$E(x) = a_x, (-\infty << a_x < +\infty)$$

- дисперсія: $D^2(x) = \sigma_x^2, \sigma_x^2 > 0$
- середнє квадратичне відхилення від середнього $D(x) = \sigma_x, \sigma_x >> 0$;
- коефіцієнт асиметрії: $As = 0$;
- коефіцієнт ексцесу: $Ex = 0$;
- коефіцієнт варіації: $\vartheta = \sigma_x / a_x$;
- начальний момент k-порядку: $H_k = E(x^k)$
- центральний момент k-порядку:

$$M_k = E(x-a_x)^k = \begin{Bmatrix} 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)\,\sigma_k^2, \text{ для парних } k \\ 0, \text{ для непарних } k \end{Bmatrix}$$

5. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина **x** набуває значення у певному заданому інтервалі, дорівнює:

$$p(a_x + c\sigma_x) - p(a_x - c\sigma_x) = p[(a_x - c\sigma_x) < x < (a_x - c\sigma_x)] = 1 - \alpha$$

де $\alpha = (1-p)$ – рівень значущости, тобто це ймовірність того, що величина **x** набуває певного значення в межах (±C) середньоквадратичних відхилень σ_X відносно середніх значень. Якщо C=1;2;3, то ймовірність дорівнює:

$$p[(a_x - \sigma_x) < x \le (a_x + \sigma_x)] = 0{,}683$$

$$p[(a_x - 2\sigma_x) < x \le (a_x + 2\sigma_x)] = 0{,}954$$

$$p[(a_x - 3\sigma_x) < x \le (a_x + 3\sigma_x)] = 0{,}997$$

При 90%-вій ймовірности інтервал відносного значення складає $(\pm 1{,}645\sigma_x)$, тобто ймовірність дорівнює:

$$p[(a_x - 1{,}645\sigma_x) < x \le (a_x + 1{,}645\sigma_x)] = 0{,}90$$

6. Цінність нормального закону розподілу (н.з.р.) в теорії хемічних, фізичних та фізико-хемічних явищ та процесів пояснюється існуванням центральної граничної теореми,яка означена так: сума великого числа сумісно діючих незалежних випадкових величин розподілена у загальному випадку законом, що близький до нормального.

3.1.2. N – вимірний нормальний закон розподілу Ґавса

1. Нехай є N випадкових(у загальному випадку корельованих) величин $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N$, середні значення яких $a_i = E(x_i)$ відповідно; дисперсії $\sigma_i^2 = E[(x_i - a_i)^2]$ відповідно; коваріяції $c_{ij} = E[(x_i - a_i)(x_j - a_j)]$ відповідно, де $c_{ij} = \sigma_i^2$.

2. Випадкові величини x_i, мають N-вимірний нормальний закон розподілу Ґавса, якщо відповідна щільність ймовірностей розподілу має вигляд:

$$\varphi(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_N) = \exp\left\{\left(-\frac{1}{2}|C|\right)\sum_{i,j=1}^{N}|C_{i,j}|(x_i - a_i)(x_j - a_j)\right\}(2\pi)^{-\frac{N}{2}}|C|^{-\frac{1}{2}}$$

Де C - коваріяційна матриця з елементами C_{ij}:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix}$$

$|C|$ - детермінант матриці C

$\left|C_{ij}\right|$ - алгебраїчне доповнення елемента C_{ij} , яке визначається як детермінант $(N-1)$-го порядку, який отримують викреслюванням з матриці (3.12) i-го рядка та j-го ґрафа, внаслідок чого отримують мінор, і множення цього мінора на $(-1)^{i+j}$.N-вимірний нормальний закон розподілу Ґавса у повній мірі визначається середніми значеннями a_i та коваріяціями C_{ij} .

3. За $N=1$ співвідношення (3.11) набуває вигляду:

$$\varphi(x_1)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

що відповідає одновимірній нормальної щільности розподілу Ґавса (3.3).

4. За $N=2$ співвідношення (3.11) набуває вигляду:

$$\varphi(x_1,x_2)=\frac{\exp\left\{\dfrac{\left[\left(\dfrac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2p_{12}\left(\dfrac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\dfrac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)+\left(\dfrac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}{2(1-p_{12})^2}\right\}}{\left(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-p_{12}^2}\right)^{-1}};$$

де $p_{12}=\dfrac{C_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$ - коефіцієнт кореляції двох випадкових величин x_1 і x_2.

При некорельованих двох випадкових величин x_1 і x_2 коефіцієнт кореляції $p_{12}=0$, то має місце співвідношення:

$$\varphi(x_1,x_2)=\varphi(x_1)\varphi(x_2)$$

звідки витікає, що, якщо величини x_1 і x_2 некорельовані, то вони й незалежні.

Цей висновок вірний для нормального закону розподілу Ґавса і є неправдивий для будь-якого іншого закону розподілу випадкових величин.

3.1.3.