5.3. Квантиль випадкової величини.

Показники, ознаки розподілу випадкових величин.

1. Квантиль p-го порядку (p-го рівня) випадкової величини X є таке її значення x_p, яке відповідає p-му рівню ймовірности:

$$p(x_p) = p(X \leq x_p) = p(-\infty < X \leq x_p) = F(x_p) = 1-\alpha, \qquad (5.3.1)$$

де $0 < p(x_p) < 1$;

α – рівень значущости;

$$1 - p(x_p) = p(x_p \leq X) = p(x_p \leq X < +\infty) = \alpha. \qquad (5.3.2)$$

Наприклад, квантиль p=0,5-го рівня дорівнює медіані розподілу випадкової величини X:

$$x_{p=0,5} = MeX \qquad (5.3.3)$$

2. Розрізняють квантилі:

а) власне квантиль, коли значення випадкової величини X, яке відповідає ймовірностям p=0,25; 0,50; 0,75, дорівнює:

$$x_{p=0,25};\ x_{p=0,50};\ x_{p=0,75}. \qquad (5.3.4)$$

Тут ділянку зміни випадкової величини X розділяють на чотири рівних интервали; попадання реалізацій випадкової величини до яких мають рівні ймовірности;

б) дециль, коли значення випадкової величини X, яке відповідає ймовірностям p=0,1; 0,2; 0,3;…; 0,8; 0,9, дорівнює:

$$x_{p=0,1};\ x_{p=0,2};\ x_{p=0,3};\ldots;\ x_{p=0,8};\ x_{p=0,9}. \qquad (5.3.5)$$

Тут ділянку зміни випадкової величини X розділяють на десять рівних интервалів, попадання реалізацій випадкової величини до яких мають рівні ймовірности;

в) процентиль коли значення випадкової величини X, яке відповідає ймовірностям p=0,01; 0,02; 0,03;…; 0,97; 0,98; 0,99, дорівнює:

$$x_{p=0,01};\ x_{p=0,02};\ x_{p=0,03};\ldots;\ x_{p=0,97};\ x_{p=0,98};\ x_{p=0,99}. \qquad (5.3.6)$$

Тут ділянку зміни випадкової величини X розділяють на сто рівних интервалів, попадання реалізацій випадкової величини до яких мають рівні ймовірности.

3. Квантилі (власне квантилі, децилі та процентилі) існують для кожного виду розподілу випадкових величин, але вони однозначно можуть бути не визначені.

4. У низці практичних завдань необхідно визначити значення випадкової величини, що відповідає заданому рівню ймовіности p=1 – α (α – рівень значущости) або q = 1 – α/2.

5. Для нормованого нормального розподілу Ґавса випадкової величини z значення нормованої величини z_p, яке відповідає певному рівню ймовірности p, означено так:

$$p(z_p) = p(Z \le z_p) = p(-\infty < Z \le z_p) = F(z_p), \qquad (5.3.7)$$

де $0 < p(z_p) < 1$.

$$\text{або } 1 - p(z_p) = p(z_p \le Z) = p(z_p \le Z < +\infty). \qquad (5.3.8)$$

де $\alpha = 1 - p(z_p)$ – рівень значущости – теж ймовірність нормованої випадкової величини Z з нормованим нормальним розподілом, носить назву кванти ля (власне квантиля, дециля, процентиля) нормованої випадкової величини z_p p-го порядку (p-го рівня) ймовірности, для якого:

$$p(z_p) = p(Z \le z_p) = p(-\infty < Z \le z_p) = \int_{-\infty}^{z_p} \varphi(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_p} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz = 1 - \alpha = [0,5 + \Phi(z_p)] \qquad (5.3.9)$$

або

$$[1 - p(z_p)] = p(z_p \le Z) = p(z_p \le Z < +\infty) = \int_{z_p}^{+\infty} \varphi(z)dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_p}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz = \alpha = [0,5 - \Phi(z_p)] \qquad (5.3.10)$$

де $\Phi(z_p)$ – функція Лапласа.

6. Із симетричности нормального розподілу витікають значення співвідношень:

$$1 - p(z_p) = \alpha; \qquad (5.3.11)$$

$$1 - \alpha = p(z_p); \qquad (5.3.12)$$

$$z_p + z_{1-p} = 0; \qquad (5.3.13)$$

$$z_p + z_\alpha = 0; \qquad (5.3.14)$$

$$z_p = -z_{1-p};\tag{5.3.15}$$

$$z_p = -z_{\alpha};\tag{5.3.16}$$

$$z_q = -z_{1-q};\tag{5.3.17}$$

$$z_q = -z_{\alpha/2},\tag{5.3.18}$$

де $p = 1 - \alpha$; $0<p<1$; $q = 1 - \alpha/2$; $0<q<1$.

7. Наприклад, для ймовірности $p = 0,9$ знайти квантиль $z_{p=0,9} = z_{0,9}$. З формули:

$$p(-\infty<Z\le z_p) = 0,5 + \Phi(z_p)\tag{5.3.19}$$

слідує, що функція Лапласа дорівнює:

$$\Phi(z_{p=0,9})=p(z_p) - 0,5 = 0,9 - 0,5 = 0,4.\tag{5.3.20}$$

За [ ] значенням функції Лапласа [$\Phi(z_p)$]відповідають квантилі [z_p]:

$\Phi(z_p) = 0,39973 \to z_p = 1,28$;

$\Phi(z_p) = 0,40147 \to z_p = 1,29$.

Тоді $\Phi(z_p) = 0,40$ буде відповідати квантиль $z_p = 1,281552$.

Для практичного використання наводимо певні значення квантилів нормованого нормального розподілу [ ]:

1) $p = 0,90$; $\alpha = 0,10$; $q = 0,95$: $z_q = 1,64485363 \approx 1,64$;

2) $p = 0,95$; $\alpha = 0,25$; $q = 0,975$: $z_q = 1,95996398 \approx 1,96$;

3) $p = 0,99$; $\alpha = 0, 01$; $q = 0,995$: $z_q = 2,57582930 \approx 2,58$.

За [ ] побудована залежність $p(z_p) = f\,(z_p)$, яка показана на рис. 5.3.1.

8. Розподіл випадкової величини X можна охарактеризувати, використовуючи вище наведений понятійний апарат, такими показниками:

а) інтерквантильною широтою:

$$\Delta x_p^k = x_{p=0,75} - x_{p=0,25}\ [\text{од.}]\tag{5.3.21}$$

б) інтердецильною широтою:

$$\Delta x_p^q = x_{p=0,9} - x_{p=0,1}\ [\text{од.}]\tag{5.3.22}$$

в) інтерпроцентильною широтою:

$$\Delta x_p^n = x_{p=0,99} - x_{p=0,01}\ [\text{од.}]\tag{5.3.23}$$

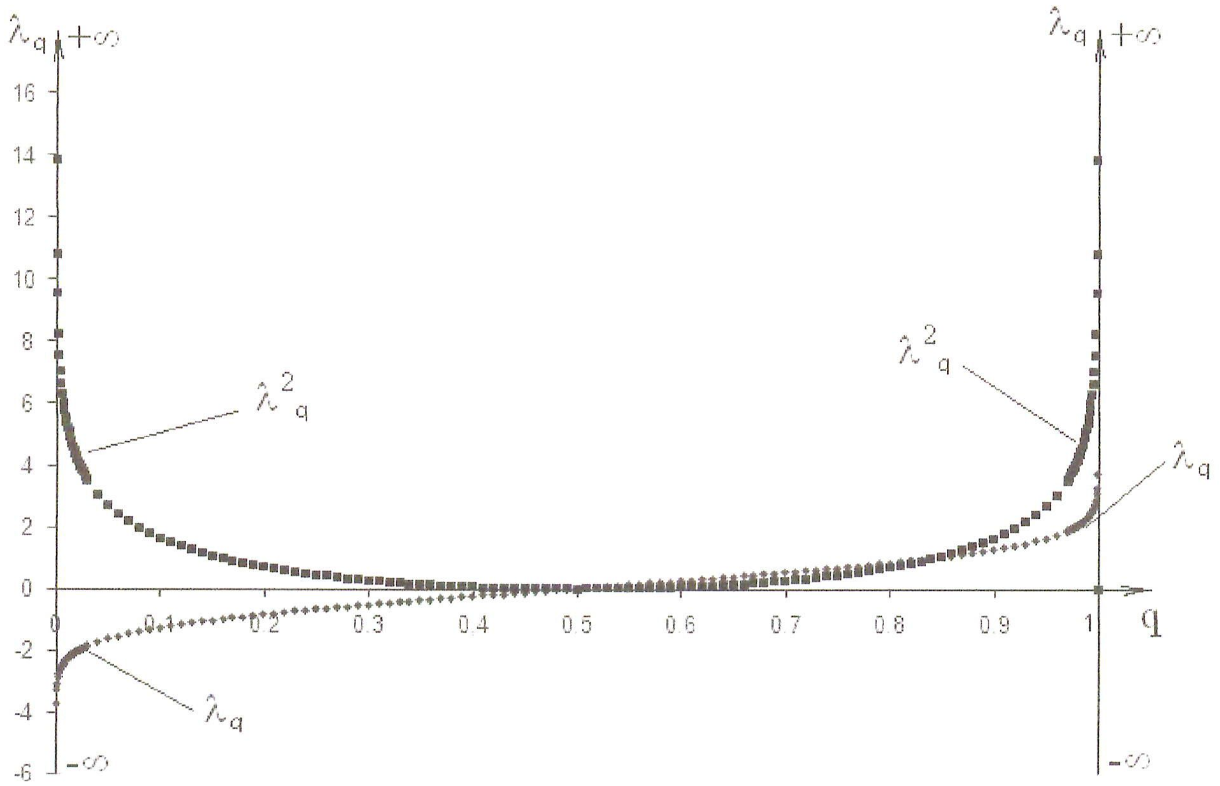


Рис. 5.3.1. Залежність ймовірности $p(z_p)$ від квантиля z_p.

г) відповідною напівширотою x_i (½) [од.], що відповідає ½$\varphi(x)$, або за нормованого нормального розподілу Ґавса випадкової величини Z:

z_i(½) [-], що відповідає значенню ½$\varphi(z)$;

ґ) асиметрією Пірсона:

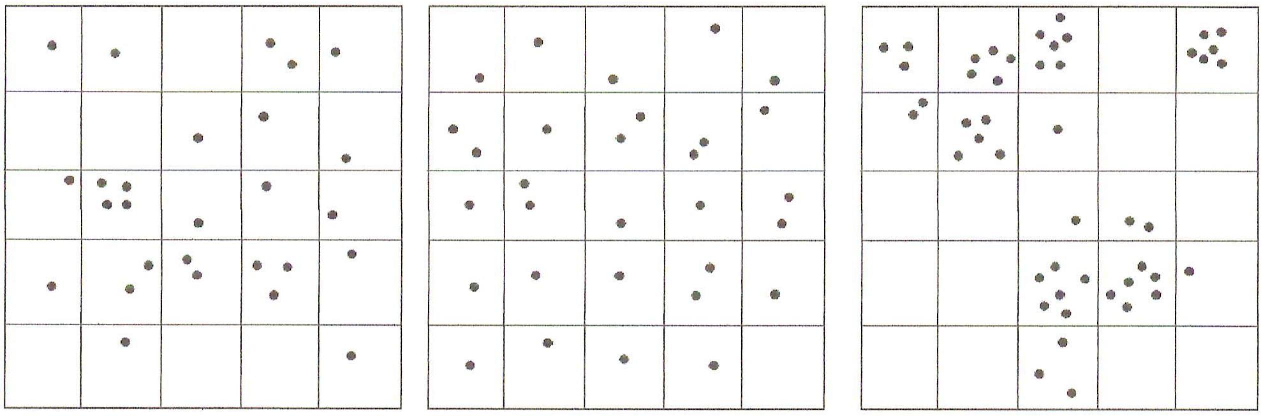
$$\text{As(Пірсона)} = \left|\frac{x_i - x_{i\max}}{\sigma_x}\right| = \left|\frac{x_i - \text{MoX}}{\sigma_x}\right| \text{ [-]}, \tag{5.3.24}$$

що відповідає $\varphi(x)_{max}$, або за нормованого нормального розподілу Ґавса випадкової величини z:

$$\text{As(Пірсона)} = \left|\frac{z_i - z_{i\max}}{\sigma_z}\right| = \left|\frac{z_i - \text{MoZ}}{\sigma_z}\right| = \left|z - z_{\max}\right| = \left|z - \text{MoZ}\right| \text{ [-]}, \tag{5.3.25}$$

так як $\sigma_Z = 1$.

9. На рис. 5.3.2 та 5.3.3 показані основні види просторового розподілу випадкової величини у квадратовій пробі (рис. 5.3.2) та прямокутній пробі (рис. 5.3.3) вибіркової сукупности.



а б в

Рис. 5.3.2. Основні види просторових розподілів значень випадкових величин у квадратовій пробі вибіркової сукупности: а – випадковий Пуассона; б – рівномірний (реґулярний); в – аґреґаційний (ґруповий, контаґіозний[1], плямистий) [ ].

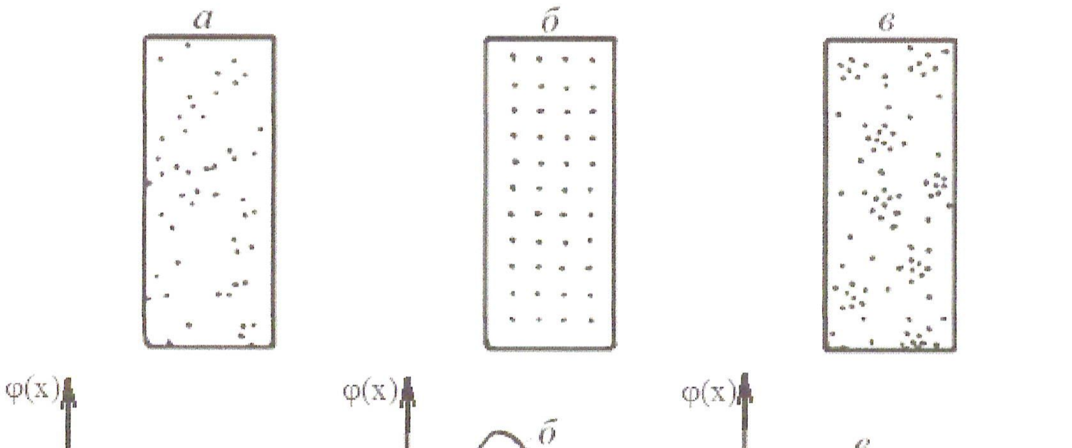


Рис. 5.3.3. Основні види просторового розподілів значень випадкових величин у прямокутній пробі (а, б, в) (зверху) та відповідно до них вибірковий розподіл частот випадкових величин (знизу): а – випадковий Пуассона; б – рівномірний (реґулярний); в – аґреґаційний (ґруповий, контаґіозний, плямистий) [ ].

[1] Контаґіо́зний, -а, -е (лат. Contagiosus – заразний). 1. мед. Заразний, пошесний. 2. наук. Ґруповий, об`єднаний в ґрупи, контактно-плямистий.

б) **видимі коефіцієнти варіації розподілу** (стандарт 1):

- ґенеральний $\upsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{a_x}$ [-]; (5.3.28)

- вибірковий $\gamma_x = \dfrac{S_x}{\overline{x}}$ [-]. (5.3.29)

в) **статистичні оцінки** ґенеральних стандартів за вибірковими стандартами:

- стандарт 1: $\gamma_X \to \upsilon_X$; (5.3.30)
- стандарт 2: $\varepsilon_X \to E_X$. (5.3.31)

г) випадковий розподіл Пуассона спостерігається у разі, якщо $\sigma^2_X=a_X$ за величиною, тоді ступінь аґреґації $E_X=1$ (статистичні оцінки за $S_x^2 \neq \overline{x}$: $\varepsilon_X \to E_X$).

ґ) якщо $\sigma^2_X<a_X$, то $E_X<1$, то такий розподіл рівномірний (реґулярний), тоді ступінь реґулярності:

- ґенеральний $E_1 = \dfrac{1}{E_x} > 1$; (5.3.32)

  $\Delta E_2 = 1 - E_x < 1$; (5.3.33)

  $\Delta E_3 = \dfrac{1-E_x}{E_x} \lesseqgtr 1$; (5.3.34)

- вибірковий $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\varepsilon_x}$; (5.3.35)

  $\Delta\varepsilon_2 = 1 - \varepsilon_x$; (5.3.36)

  $\Delta\varepsilon_3 = \dfrac{1-\varepsilon_x}{\varepsilon_x}$; (5.3.37)

- статистичні оцінки:

  $\varepsilon_1 \to E_1$; (5.3.38)

  $\Delta\varepsilon_2 \to \Delta E_2$; (5.3.39)

  $\Delta\varepsilon_3 \to \Delta E_3$, (5.3.40) д) якщо $\sigma^2_x > a_x$, то $E_x > 1$, то такий розподіл контаґіозний (ґруповий, аґреґаційний, плямистий), тоді ступінь контаґіозности розподілу випадкової величини:

- ґенеральний $E_1 = \dfrac{1}{E_x} < 1$; (5.3.41)

  $\Delta E_2 = (E_x - 1) \lesseqgtr 1$; (5.3.42)

  $\Delta E_3 = \dfrac{E_x - 1}{E_x} < 1$; (5.3.43)

- вибірковий $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\varepsilon_x}$; (5.3.44)

  $\Delta\varepsilon_2 = \varepsilon_x - 1$; (5.3.45)

  $\Delta\varepsilon_3 = \dfrac{\varepsilon_x - 1}{\varepsilon_x}$; (5.3.46)

- статистичні оцінки:

  $\varepsilon_1 \rightarrow E_1$; (5.3.47)

  $\Delta\varepsilon_2 \rightarrow \Delta E_2$; (5.3.48)

  $\Delta\varepsilon_3 \rightarrow \Delta E_3$. (5.3.49)

Квантилі (λ_q) нормованого нормального розподілу для ймовірности ($q=1-\alpha/2$)

0			**0,5**	0	0
0,0001	-3,72	13,8384	**0,51**	0,025069	0,0006285
0,0005	-3,290527	10,827568	**0,52**	0,050154	0,0025154
0,001	-3,090232	9,5495338	**0,53**	0,07527	0,0056656
0,002	-2,878162	8,2838165	**0,54**	0,100434	0,010087
0,003	-2,747781	7,5503004	**0,55**	0,125661	0,0157907
0,004	-2,65207	7,0334753	**0,56**	0,160969	0,025911
0,005	-2,575829	6,634895	**0,57**	0,176374	0,0311078
0,006	-2,512114	6,3107167	**0,58**	0,201893	0,0407608
0,007	-2,457263	6,0381415	**0,59**	0,227545	0,0517767
0,008	-2,408916	5,8028763	**0,6**	0,253347	0,0641847
0,009	-2,365618	5,5961485	**0,61**	0,279319	0,0780191
0,01	-2,326348	5,411895	**0,62**	0,305481	0,0933186
0,011	-2,290368	5,2457856	**0,63**	0,331853	0,1101264
0,012	-2,257129	5,0946313	**0,64**	0,358459	0,1284929
0,013	-2,226212	4,9560199	**0,65**	0,38532	0,1484715
0,014	-2,197286	4,8280658	**0,66**	0,412463	0,1701257
0,015	-2,17009	4,7092906	**0,67**	0,439913	0,1935234
0,016	-2,144411	4,5984985	**0,68**	0,467699	0,2187424
0,017	-2,120072	4,4947053	**0,69**	0,49585	0,2458672
0,018	-2,096927	4,3971028	**0,7**	0,524401	0,2749964
0,019	-2,074855	4,3050233	**0,71**	0,553385	0,306235
0,02	-2,053749	4,217885	**0,72**	0,582842	0,3397048
0,021	-2,03352	4,1352036	**0,73**	0,612813	0,3755398
0,022	-2,014091	4,0565626	**0,74**	0,643345	0,4138928
0,023	-1,995393	3,9815932	**0,75**	0,67449	0,4549368
0,024	-1,977368	3,9099842	**0,76**	0,706303	0,4988639
0,025	-1,959964	3,8414589	**0,77**	0,738847	0,5458949
0,026	-1,943134	3,7757697	**0,78**	0,772193	0,596282
0,027	-1,926837	3,7127008	**0,79**	0,806421	0,6503148
0,028	-1,911036	3,6520586	**0,8**	0,841621	0,7083259
0,029	-1,895698	3,5936709	**0,81**	0,877896	0,7707014
0,03	-1,880794	3,5373861	**0,82**	0,915365	0,8378931
0,04	-1,750686	3,0649015	**0,83**	0,954165	0,9104308
0,05	-1,644854	2,7055447	**0,84**	0,994458	0,9889467
0,06	-1,554774	2,4173222	**0,85**	1,036433	1,0741934
0,07	-1,475791	2,1779591	**0,86**	1,080319	1,1670891
0,08	-1,405072	1,9742273	**0,87**	1,126391	1,2687567
0,09	-1,340755	1,797624	**0,88**	1,174987	1,3805945
0,1	-1,281552	1,6423755	**0,89**	1,226528	1,5043709

0,11	-1,226528	1,5043709	**0,9**	1,281552	1,6423755
0,12	-1,174987	1,3805945	**0,91**	1,340755	1,797624
0,13	-1,126391	1,2687567	**0,92**	1,405072	1,9742273
0,14	-1,080319	1,1670891	**0,93**	1,475791	2,1779591
0,15	-1,036433	1,0741934	**0,94**	1,554774	2,4173222
0,16	-0,994458	0,9889467	**0,95**	1,644854	2,7055447
0,17	-0,954165	0,9104308	**0,96**	1,750686	3,0649015
0,18	-0,915365	0,8378931	**0,97**	1,880794	3,5373861
0,19	-0,877896	0,7707014	**0,971**	1,895698	3,5936709
0,2	-0,841621	0,7083259	**0,972**	1,911036	3,6520586
0,21	-0,806421	0,6503148	**0,973**	1,926837	3,7127008
0,22	-0,772193	0,596282	**0,974**	1,943134	3,7757697
0,23	-0,738847	0,5458949	**0,975**	1,959964	3,8414589
0,24	-0,706303	0,4988639	**0,976**	1,977368	3,9099842
0,25	-0,67449	0,4549368	**0,977**	1,995393	3,9815932
0,26	-0,643345	0,4138928	**0,978**	2,014091	4,0565626
0,27	-0,612813	0,3755398	**0,979**	2,03352	4,1352036
0,28	-0,582842	0,3397048	**0,98**	2,053749	4,217885
0,29	-0,553385	0,306235	**0,981**	2,074855	4,3050233
0,3	-0,524401	0,2749964	**0,982**	2,096927	4,3971028
0,31	-0,49585	0,2458672	**0,983**	2,120072	4,4947053
0,32	-0,467699	0,2187424	**0,984**	2,144411	4,5984985
0,33	-0,439913	0,1935234	**0,985**	2,17009	4,7092906
0,34	-0,412463	0,1701257	**0,986**	2,197286	4,8280658
0,35	-0,38532	0,1484715	**0,987**	2,226212	4,9560199
0,36	-0,358459	0,1284929	**0,988**	2,257129	5,0946313
0,37	-0,331853	0,1101264	**0,989**	2,290368	5,2457856
0,38	-0,305481	0,0933186	**0,99**	2,326348	5,411895
0,39	-0,279319	0,0780191	**0,991**	2,365618	5,5961485
0,4	-0,253347	0,0641847	**0,992**	2,408916	5,8028763
0,41	-0,227545	0,0517767	**0,993**	2,457263	6,0381415
0,42	-0,201893	0,0407608	**0,994**	2,512114	6,3107167
0,43	-0,176374	0,0311078	**0,995**	2,575829	6,634895
0,44	-0,160969	0,025911	**0,996**	2,65207	7,0334753
0,45	-0,125661	0,0157907	**0,997**	2,747781	7,5503004
0,46	-0,100434	0,010087	**0,998**	2,878162	8,2838165
0,47	-0,07527	0,0056656	**0,999**	3,090232	9,5495338
0,48	-0,050154	0,0025154	**0,9995**	3,290527	10,827568
0,49	-0,025069	0,0006285	**0,9999**	3,72	13,8384