5. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОМИЛОК

5.1. Види вимірювань, помилок, похибок

5.1.1. Термінологія

1. **По́ми́лка**, -и, ж. По́хибка, оми́лка, змилка, оми́лка, милка, ми́лок; неточність, неправильність у підрахунках, діях, вчинках, процедурах, у написанні символів, слів, математичних і хемічних формулах; неправильність, неточність у якому-небудь пристрої, механізмі, в якійсь схемі, карті тощо; неправильна думка, хибне уявлення про когось, про щось (лат. ōris, error; англ. error; нім. Fehler, Irrtum; рос. оши́бка, погре́шность; фр. erreur); помилятися (лат. erro, āvi, ātum, āre);

- **помилко́вий** – мильний, змильний, омильний, хибний, невірний (англ. erroneous, нім. Fehlerhaft, рос. ошибочный); помилкове обчислення (англ. error calculation); прикм. до помилка;
- **помилка спостережень, помилка відліку** (англ. error in observation);
- **помилятися** – попадати в помилки, мили́ти, мила́ти, безпомилковий, непомильний, неомильний, необмильний, змилити.

Розрізняють помилки: абсолютні, ймовірні, вибіркового обстеження, ґрадуювання, графічні, грубі, допустимі, вирювання, лінійні, відносні, першого роду, другого роду, середні тощо; помилка в скалі градуювання (англ. error of graduation); пропущення, пробіл, упущення (англ. error of omission); **випадкова** помилка (англ. accidental error); накопичена, сумарна, загальна помилка (англ. accumulated error, aggregate error); груба, явна помилка (англ. appreciable error, gross error); **допустима, припустима, гранична помилка** (англ. admissible error); **арифметична помилка** (англ. clerical error); максимальна гранична помилка (англ. maximum error); середньоквадратична помилка (англ. mean-square error); помилка вимірювання (англ. measuring error); багатократна помилка (англ. multiple error); ймовірнісна помилка (англ. probable error); помилка із-за неточности інструменту або приладу (англ. instrumental error); випадкова помилка (англ. random error); відносна помилка (англ. relative error); результуюча помилка (англ. resultant error); помилка округлення (англ. round-off error); статистична помилка (англ. statistical error); стала, **систематична** помилка (англ. systematic error); дійсна помилка (англ. true error); помилка формули (англ. truncation error); **грубі (різко виділені результати досліджень, промахи**) тощо.

2. По́хибка. По́милка, промах, недогляд у чому-небудь; мат. Різниця між точною величиною чого-небудь та величиною, знайденою при вимірюванні;

погрішність; неправильність, неточність, відхилення від норми в роботі якогось механізму, пристрою, приладу тощо.

- межа похибок (англ. error limit; нім. Fehlergrenze; рос. погрешность; фр. Limite d'erreur).

Розрізняють похибки: абсолютні (англ. absolute error), вимірювального пристрою, повні, випадкові, комплексні, нагромадження, відносні, змінні, первинні, показувань приладів, сталі, приладів, систематичні, сумарні; інструментальна (англ. instrumental error); номінальна (відносна) (англ. nominal error); допустима (гранична) (англ. permissible error); випадкова (англ. random error); відносна (англ. relative error); формули (англ. truncation error).

5.1.2. Класифікація видів вимірювань

Види вимірювань класифікують за такими ознаками:

- за способом отримання результату;
- за методом вимірювань;
- за умовами вимірювань;
- за ступенем достатності вимірювань.

1. За способом отримання результату досліду розрізняють: прямі та непрямі вимірювання.

За прямими вимірюваннями отримують безпосередні значення величин, що витягують з досліду. За непрямими вимірюваннями значення дослідної величини безпосередньо не отримають, а розраховують як функцію за результатами вимірювань інших величин.

2. За методом вимірювань розрізняють: абсолютні та порогові (допустимі, граничні). За абсолютними вимірюваннями значення дослідної величини реєструють у дискретному або аналоговому режимах, при цьому результат вимірювання має розмірність дослідної величини і містить **похибку вимірювань**.

За пороговими вимірюваннями значення дослідної величини не реєструються, а фіксується її попадання у одно-чи двобічний інтервали, при цьому додатково може вказуватися ймовірність попадання величини у ці допустимі межі. Фактично проводять реєстрацію дослідної величини в режимі «так» або «ні».

3. За умовам вимірювань розрізняють: рівно точні та нерівно точні вимірювання.

Рівноточні вимірювання проводять **при однакових умовах**, які визначають загальну точність вимірювань: тип, клас, екземпляр приладу, кількість вимірювань, зовнішні умови, кваліфікація досілжника, оператора тощо.

Нерівноточні вимірювання не відповідають вище наведеним умовам.

4. За ступенем достатності вимірювань розрізняють: **необхідні** та **надлишкові вимірювання**. На відміну від необхідної кількості вимірювань, достатню точність та надійність яких пов'язують із визначеннями властивостей об'єкту досліджень, **надлишкові вимірювання** дають більшу кількість або більшу точність та надійність результатів. Тобто при надлишковий вимірюваннях або спостереженнях дослідник отримує більший обсяг інформації, і, відповідно, можливість оперувати нею.

5.1.3. Класифікація видів похибок

Види похибок класифікують за такими ознаками:

- за формою числового вираження;
- за закономірностями проявлення;
- за можливістю (ймовірністю) реалізації.

1. За формою числового вираження розрізняють: абсолютну, відносну та приведену (зведену) відносну похибку.

1.1. **Абсолютна похибка** уявляє собою різницю між результатом вимірювання x_i [од.] величини X та її дійсним значенням a_x [од.]:

$$\Delta x_i = x_i - a_x \ [\text{од.}] \tag{5.1}$$

або за абсолютною величиною

$$\Delta x_i = |x_i - a_x| \ [\text{од.}]. \tag{5.2}$$

Приклад 5.1. Нехай на терезах зважують 1 кг зразка матеріалу. Терези показують 0,95 кг. Тут дійсне значення величини X: a_x=1 кг, результат вимірювання цієї величини x_i=0,95 кг, абсолютна похибка вимірювань на терезах складає:

$$\Delta x_i = |x_i - a_x| = |0{,}95 - 1{,}0| = |-0{,}05| = 0{,}05 \ \text{кг}.$$

1.2. **Відносна похибка** – це абсолютна похибка, що відноситься на одиницю вимірювальної величини:

$$\delta_{xi} = \frac{\Delta x_i}{a_x} \cdot 100\% \tag{5.3}$$

$$\text{або } \delta_{xi} = \left|\frac{\Delta x_i}{a_x}\right| \cdot 100\% \tag{5.4}$$

Приклад 5.2. За результатами прикладу 5.1 відносна похибка дорівнює:

$$\delta_x = \left|\frac{\Delta x_i}{a_x}\right| \cdot 100\% = \frac{0,05}{1,0} \cdot 100\% = 5\%.$$

1.3. **Зведена (приведена) відносна похибка** визначена як відношення абсолютної похибки до максимального значення результату вимірювання або максимального значення шкали приладу a_{max}:

$$\delta_{пр} = \frac{\Delta x_i}{a_{max}} \cdot 100\% \tag{5.5}$$

$$\text{або } \delta_{пр} = \left|\frac{\Delta x_i}{a_{max}}\right| \cdot 100\% \tag{5.6}$$

2. За закономірностями проявлення розрізняють: випадкову, систематичну та грубу (промах, різко виділений результат) похибки.

2.1. **Випадкова похибка.** Випадковою похибкою називають похибку, яка в окремих вимірюваннях може приймати випадкові, попередньо невідомі значення.

2.1.1. Випадкові помилки виникають внаслідок дії випадкових факторів і можуть мати різне походження:

- під час зміни одного вимірювального приладу на інший;
- під час зміни одного способу вимірювання на інший або однієї процедури на іншу;
- під час переходу від одного циклу вимірювань до іншого;
- під час зміни і приладу, і циклу;
- за причини лінійного або нелінійного дрейфу параметрів приладу, властивостей, реактивів і т. ін. у часі;
- природне походження;
- тощо.

Як правило, відомі лише числові характеристики закону розподілу похибок вимірювань. Ці похибки (помилки) необхідно врахувати при математичному плануванні експерименту, приблизно рівномірно розкладаючи їх за факторами, за дослідами та за повторними випробуваннями тощо.

2.1.2. Оцінку середньо квадратичного відхилення випадкової похибки $S_\varepsilon = \sqrt{S^2}$ дають за n-вимірюваннями детермінованої величини за формулою оцінки дисперсії помилки:

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \tag{5.7}$$

2.1.3. При математичному плануванні експерименту розраховують помилку всього експерименту за $S_\varepsilon^2 = S_{\{y\}}^2$ – дисперсія відновлення. При цьому можливе таке планування:

1) **Дублювання (повтор) дослідів** визначають у всіх i-точках плану експерименту:

а) **n_i=const=n**

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{n}\left(y_{iu} - \overline{y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}(n_i - 1)} = \frac{SS_{\{y\}}}{f} = \frac{SS_{\{y\}}}{N(n-1)}, \tag{5.8}$$

де $SS_{\{y\}}$ – сума квадратів відхилення кожного значення резудбтату повторного випробування (чисельник);

$f = \sum_{i=1}^{N}(n_i - 1) = N(n-1)$ - число ступенів вільностей (знаменник);

$\overline{y}_i = \frac{\sum_{u=1}^{n} y_{iu}}{n}$ - середня i-точки плану.

б) **n_i=var**

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(f_i \cdot S_i^2\right)}{\sum_{i=1}^{N} f_i}, \tag{5.9}$$

де $f_i = (n_i - 1)$ - число ступенів вільностей для i-точки плану;

$S_i^2 = \frac{\sum_{u=1}^{n_i}\left(y_{iu} - \overline{y}_i\right)^2}{n_i - 1} = \frac{SS_{iu}}{f_i}$ - дисперсія результатів u-повторних дослідів для i-точки плану.

2) Дублювання (повтор) лише в одній (окремій точці поза планом або в нульовій точці факторного простору) або одній вибраній точці плану:

$$S_{\varepsilon}^2 = S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{i_0=1}^{n_0} \left(y_{0u} - \bar{y}_0\right)^2}{n_0 - 1} = \frac{SS_0}{f_0}, \qquad (5.10)$$

де i_0 – окрема точка;

y_{0u} – окремий u-результат в 0-точці;

$\bar{y}_0 = \frac{\sum_{u=1}^{n_0} y_{0u}}{n_0}$ - середня результатів 0-точки плану;

$f_0 = (n_0 - 1)$ - число ступенів вільностей для 0-точки.

3) Якщо $\mathbf{n_i=n=1}$, то в якості помилки експерименту всього плану вибирають дисперсію середньої:

$$S_{\{y\}}^2 = S_{\{\bar{y}\}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \bar{y}\right)^2}{N - 1} = \frac{SS}{f}, \qquad (5.11)$$

де y_i – окремий результат в i-точці плану;

$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$ - середній результат всіх i точок плану.

4) При $\mathbf{n_i=const=n\neq 1}$ (рівномірному дублюванні дослідів у кожній точці плану) дисперсія середньої дорівнює:

$$S_{\{\bar{y}\}}^2 = \frac{S_{\{y\}}^2}{N}. \qquad (5.12)$$

2.1.4. Непрямі вимірювання при наявности випадкової похибки

1. Нехай під час непрямих вимірювань величини Y безпосередньо в досліді вимірюються величини $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n$. Вважаємо, що величина Y є функцією інших випадкових величин: $Y=f(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n)$.

2. При наявності випадкових похибок для величин X_i результати вимірювань цих величин стають випадковими і розрахований результат за Y стає теж випадковим – функцією випадкових аргументів:

$$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \qquad (5.13)$$

Зазвичай вид функції $y=f(x_1, x_2)$; $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ відомий. Завдання непрямого вимірювання формулюються так: за результатами прямих вимірювань $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ необхідно отримати оцінку Y і визначити точність цієї оцінки.

Точкову оцінку Y знаходять за допомогою середніх значень $x_1, x_2, \ldots$:

$$\bar{y}=f(x_1, x_2);$$

$$\bar{y}=f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

Приблизну оцінку абсолютної похибки непрямого вимірювання Y знаходять, виходячи з:

а) якщо $y=f(x)$

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x; \tag{5.13}$$

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \Delta x; \tag{5.14}$$

б) $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

Тоді абсолютну похибку можна знайти за:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} \right]^2 \cdot \Delta x_i^2 \right\}}, \tag{5.15}$$

де Δx_i – абсолютні граничні похибки вимірювальних величин x_1, x_2, …, x_i, …, x_n, а відносну похибку за:

$$\delta_y = \frac{\Delta y}{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\partial \ln f(x_i)}{\partial x_i} \right]^2 \cdot \Delta x_i^2 \right\}} \tag{5.16}$$

Дамо оцінку абсолютної та відносної похибки непрямих вимірювань за результатами прямих вимірювань для певних випадків. Попередньо введемо такі означення:

- закон складання дисперсій:

Якщо $y=x_1+x_2$,

то $S_y^2 = S_{x1}^2 + S_{x2}^2$, при цьому осереднення дисперсій, (5.17)

якщо $S_{x1}^2 = \frac{SS_{x1}}{f_{x1}}$, а $S_{x2}^2 = \frac{SS_{x2}}{f_{x2}}$, (5.18)

то $S_y^2 = \frac{SS_{x1} + SS_{x2}}{f_{x1} + f_{x2}}$ (5.19)

- закон складання незалежних випадкових помилок:

а) якщо $y=x_1+x_2$, то $\Delta y = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}$, а (5.20)

$$\delta_y = \frac{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}}{x_1 + x_2} \tag{5.21}$$

б) якщо $y=x_1-x_2$, то $\Delta y = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}$, а (5.22)

$$\delta_y = \frac{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}}{x_1 + x_2} \tag{5.23}$$

в) якщо y=x$_1$·x$_2$, то $\Delta y = \sqrt{x_2^2 \Delta x_1^2 + x_1^2 \Delta x_2^2}$, а (5.24)

$$\delta_y = \delta x_1^2 + \delta x_2^2 \qquad (5.25)$$

г) якщо y=x$_1$·x$_2$·…·x$_i$·…·x$_n$, то

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta x_n}{x_n}\right)^2 \qquad (5.26)$$

ґ) якщо $y = \frac{x_1}{x_2}$, то (5.27)

$$\Delta y = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_1^2 \Delta x_2^2}{x_2^4}}, \qquad (5.28)$$

$$\left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2 \qquad (5.29)$$

д) якщо y=ax+b, де a, b=const, то $\Delta y = a \cdot \Delta x$. (5.31)

е) якщо $y = x_1^a x_2^b x_3^c$, то (5.32)

$$\delta_y = \sqrt{a^2 \delta_{x1}^2 + b^2 \delta_{x2}^2 + c^2 \delta_{x3}^2} \, . \qquad (5.33)$$

2.2. Систематична похибка

1. Систематична похибка є або сталою (одно або двосторонньою) або змінюється за певним законом у часі від порядкового числа вимірювання або від іншої будь-якої незалежної змінної.

Якщо систематична похибка визначена, тобто має конкретне значення (наприклад, +Δ_0), то вона враховується при відліку результату вимірювань (в цьому випадку вона має назву поправки), або її виявляють і зменшують, усувають, відхиляють, прибирають, ліквідовують.

2. Систематичну похибку задають у формі: +Δ_0, . Частіше за все буває відомим, що систематична похибка має позитивний знак, а числове значення її знаходиться в межах (0…+Δ_0) або (-Δ_0…0). Запис $\pm\Delta_0$ вказує на те, що невідома величина і невідомий знак систематичної похибки, а відомо, що її абсолютна величина не перевищує $|\pm \Delta_0| \le \Delta_0$.

3. Емпіричну оцінку систематичної похибки роблять за відомою детермінованою величиною a_x:

$$\Delta_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - a_x . \qquad (5.34)$$

Точність оцінки Δ_0 і число вимірювань при цьому визначається таким же чином, як і у випадку математичного сподівання випадкової величини.

2.3. Грубі похибки (помилки)

Грубі похибки (промахи) – це різко виділені результати в ряду вимірювань або спостережень.

Грубі похибки (промахи) пов'язані з прорахунками дослідника, експериментатора, оператора, пошкодженням приладу вимірювань, різкою зміною зовнішніх параметрів. Грубі похибки різко змінюють результати вимірювань. Їх виявляють за певними процедурами (правилами, реґулами) і викидають із ряду вимірювань.

Нехай ми маємо варіяційний ряд вимірювання випадкової величини Y:

$$y_1 \le y_2 \le y_3 \le \ldots \le y_i \le \ldots \le y_{N-1} \le y_N \qquad (5.35)$$

Різко виділеними результатами у варіяційному ряду (5.35) може бути y_1 або y_N, або y_1 і y_N, або таких результатів k. Якщо у ряді (5.35) такий результат лише один, то спочатку розраховують точкові оцінки для ряду (5.35) обсягом N:

а) якщо виділений результат близький до решти (N-1) результатів:

$$\bar{y}_N = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}; \qquad (5.36)$$

$$S_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2}{N-1}} \qquad (5.37)$$

б) якщо вмилений результат значно відрізняється від решти (N-1) результатів:

$$\bar{y}_{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} y_i}{N-1}; \qquad (5.38)$$

$$S_{N-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N-1} (y_i - \bar{y}_{N-1})^2}{N-2}} \qquad (5.39)$$

Висувають нульову гіпотезу: H_0: виділений результат належить тій же ґенеральній сукупності, що й решта (N-1) результатів ряду (5.35).

Альтернативна гіпотеза буде сформульована так: H_1: виділений результат не належить ґенеральній сукупності, якій належать решта (N-1) результатів.

У випадку, коли різко виділені результати x_1 і x_N або таких результатів k у ряду (5.35), то розраховують:

$$\bar{y}_{N-2} = \frac{\sum_{i=1}^{N-2} y_i}{N-2}; \tag{5.40}$$

або

$$\bar{y}_{N-k} = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} y_i}{N-k}; \tag{5.41}$$

$$S_{N-2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N-2}\left(y_i - \bar{y}_{N-2}\right)^2}{N-3}} \tag{5.42}$$

або

$$S_{N-k} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N-k}\left(y_i - \bar{y}_{N-2}\right)^2}{(N-k)-1}} \tag{5.43}$$

Перевірку H_0 проводять за критеріями:

а) Ірвіна:

$$J_{pN} = \left|\frac{y_N - y_{N-1}}{S_N}\right| \tag{5.44}$$

$$J_{p1} = \left|\frac{y_1 - y_2}{S_N}\right| \tag{5.45}$$

- Якщо J_{pN} (або $J_{p1}\ldots$) $\leq J_т$ (α;N) або $J_т\{\alpha;(N-1)\}$, $J_т\{\alpha;(N-2)\}$, $J_т\{\alpha;(N-k)\}$ (5.46) з ймовірністю $p=1-\alpha$ для обсягу результатів N [(N-1); (N-2); (N-k)] з ризиком (рівнем значущости критерію) $\alpha=1-p$, то нульову гіпотезу H_0 приймають: тобто відхилення величини є випадковим, виділений результат належить тій же ґенеральній сукупності, що й решта (N-1) [чи (N-2), чи (N-k)] результатів; цей результат не є грубою помилкою і його залишають у ряді вимірювань. При цьому ступінь належності «виділеного» результату певній ґенеральній сукупности визначає нерівності:

$$\xi_1(J) = \frac{J_T}{J_p} \geq 1, \tag{5.47}$$

а залишки ступеня неналежності:

$$\xi_2(J) = \frac{J_p}{J_T} < 1. \quad (5.48)$$

- Якщо J_{pN} (або $J_{p1}\ldots$) > $J_т$ (α;N) (5.49)

або $J_т\{\alpha;(N\text{-}1)\}$, $J_т\{\alpha;(N\text{-}2)\}$, (5.50)

$J_т\{\alpha;(N\text{-}k)\}$, (5.51)

то з ймовірністю p=1-α [з ризиком (рівнем значущости критерію) α=1-p] при обсязі вибірки результатів N [(N-1); (N-2); (N-k)] прийняття рішення H_0 відхиляють (приймають H_1): виділений результат не належить тій ґенеральній сукупності, що й решта (N-1) [чи (N-2), чи (N-k)] результатів; цей результат є грубою помилкою (промахом) і його можна викинути з ряду вимірювань. Ступінь «грубості» результату (неналежності певній ґенеральній сукупності) оцінюємо за:

$$\xi_2(J) = \frac{J_p}{J_T} > 1, \quad (5.52)$$

при цьому залишки належності для цієї ж ґенеральної сукупності оцінюємо за:

$$\xi_1(J) = \frac{J_T}{J_p} \leq 1, \quad (5.53)$$

У разі, якщо за (5.47) ξ_2(J)≥1, то результат (якщо N=min) можна залишити в ряду з ризиком α.

б) Ґруббса.

Розраховують:

$$\Gamma_{pN} = \left| \frac{x_N - \bar{x}_N}{S_N} \right| \quad (5.54)$$

$$\Gamma_{p1} = \left| \frac{x_1 - \bar{x}_N}{S_N} \right| \quad (5.55)$$

та порівнюють $Ґ_р$ з табличними значеннями $Ґ_т\{\alpha;N\}$.

- Якщо $Ґ_р \leq Ґ_т$, то H_0 приймають, стверджуючи, що виділений результат не є промахом, а належить тій же ґенеральній сукупності, що й решта (N-1) результатів. При цьому ступінь належності «виділеного» результату певній ґенеральній сукупности визначає нерівності:

$$\xi_1(\Gamma) = \frac{\Gamma_T}{\Gamma_p} \geq 1, \quad (5.56)$$

а залишки ступеня неналежності:

$$\xi_2(\Gamma) = \frac{\Gamma_p}{\Gamma_T} < 1. \tag{5.57}$$

- Якщо $Ґ_р > Ґ_т$, H_0 відкидають (приймають H_1), стверджуючи, що виділений результат є грубою помилкою і не належить тій же ґенеральній сукупності, що й решта (N-1) результатів; при цьому ступінь неналежності результату:

$$\xi_2(\Gamma) = \frac{\Gamma_p}{\Gamma_T} > 1, \tag{5.58}$$

а залишки ступеня належності:

$$\xi_1(\Gamma) = \frac{\Gamma_T}{\Gamma_p} \le 1, \tag{5.59}$$

в) Романовського.

Розраховують:

$$t_{pN} = \left| \frac{x_N - \bar{x}_{N-1}}{S_{N-1}} \right| \tag{5.60}$$

$$t_{p1} = \left| \frac{x_1 - \bar{x}_{N-1}}{S_{N-1}} \right| \tag{5.61}$$

та порівнюють $Ґ_р$ з табличним значенням $t_т\{\alpha;N\}$.

- Якщо $t_р \le t_т$, то з рівнем значущості α H_0 приймають та стверджують, що виділений результат належить тій же ґенеральній сукупності, що й решта (N-1) результатів зі ступенем належності:

$$\xi_1(t) = \frac{t_T}{t_p} \ge 1, \tag{5.62}$$

та залишками ступеня неналежності:

$$\xi_2(t) = \frac{t_p}{t_T} < 1. \tag{5.63}$$

- Якщо $t_р > t_т$, то з рівнем значущості α H_0 відкидають (приймають H_1), стверджуючи, що виділений результат не належить тій же ґенеральній сукупності, що й решта (N-1) результатів зі ступенем неналежності:

$$\xi_2(t) = \frac{t_p}{t_T} > 1, \tag{5.64}$$

та залишками ступеня належності:

$$\xi_1(t) = \frac{t_T}{t_p} \le 1. \tag{5.65}$$

г) Правило 2-х та 3-х сиґм.

При н.з.р. результатів вимірювань або спостережень випадкової величини в інтервалі 2-х сиґм з ймовірністю $p(a_x \pm 2\sigma)=1-\alpha=0{,}9545$ попадає 95,45% результатів, решту результатів можна вважати різко виділеними, але при цьому необхідно мати достатньо показну кількість результатів, щоби:

$$a_x \pm 2\sigma \approx \overline{x} \pm 2S \tag{5.66}$$

В інтервал 3-х сиґм з ймовірністю $p(a_x \pm 3\sigma)=1-\alpha=0{,}9973$ попадає 99,73% результатів, решту результатів (0,27%) можна вважати різко виділеними і їх можна виключити із розгляду, але при цьому кількість результатів повинна бути достатньо показною, щоби:

$$a_x \pm 3\sigma \approx \overline{x} \pm 3S \tag{5.67}$$

3. За ймовірністю (можливістю) реалізації розрізняють **граничні, середньоквадратичні, ймовірні, середні, та середньоарифметичні похибки.**

1. Означення граничної похибки використовується для характеристики випадкової, систематичної помилок або їх сполучення. **Гранична похибка** – це похибка, яку практично не перевищують або не перевищують з певною ймовірністю випадкова, систематична похибка або їх сполучення.

У тих випадках, коли похибка є випадковою або складається із випадкової і систематичної, вказується рівень ймовірності, якому відповідають граничні значення похибки. Наприклад, імовірність 0,90; 0,95; 0,975; 0,99; 0,9975; 0,999 тощо. Якщо випадкова похибка, розподілена за нормальним законом, то замість ймовірності вказується відповідне число квантиля або «сиґм». Наприклад, гранична похибка на рівні одної «сиґми» $\pm\sigma$ (ймовірність 0,6827), двох «сиґм» $\pm 2\sigma$ (ймовірність 0,9545), трьох «сиґм» $\pm 3\sigma$ (ймовірність 0,9973) і таке інше. В цьому випадку для граничної похибки використовують позначення:

$$\Delta_{\sigma};\ \Delta_{0,6827};\ \Delta_{2\sigma};\ \Delta_{0,9545};\ \Delta_{3\sigma};\ \Delta_{0,9973};\ \ldots \tag{5.68}$$

Чисто систематичну похибку позначають $+\Delta_0$; $-\Delta_0$; $\pm\Delta_0$. Якщо систематична похибка має значення $+\Delta_0$, то це означає лише, що похибка має позитивний знак, а значення її лежить в межах $0\ldots+\Delta_0$, а якщо $-\Delta_0$, то похибка має негативний знак, а її значення лежить в межах $-\Delta_0\ldots 0$. Запис $\pm\Delta_0$ означає, що ні знак, ні певна величина систематичної похибки, а лише її абсолютна величина не перевищує Δ_0, експериментальна оцінка якої:

$$\Delta_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} - a_x \,. \tag{5.69}$$

У тих випадках, коли тип похибки не з’ясований або її рівень ймовірності невідомий, ґраничну похибку позначають Δ_{lim} або $\Delta_{гран}$.

2. **Середньоквадартична (стандартна) похибка** σ_Δ оцінюється за результатами n-вимірювань:

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i^2} \,, \tag{5.70}$$

a_x – істинне значення величини, що вимірюється;

x_i – реалізація результату вимірювання;

$\Delta x_i = (x_i - a_x)$ - абсолютна похибка у i-тому вимірюванні.

3. **Ймовірна похибка** r_Δ – величина, більше або менше якої (за абсолютною величиною) реалізації похибок є рівно можливі, зокрема, для похибки, розподіленої за нормальним законом:

$$r_\Delta = {}^{2}\!/_{3}\,\sigma_\Delta \,. \tag{5.71}$$

4. **Середня похибка** визначається так:

$$\left|\Delta\overline{x}\right| = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \left|\Delta\overline{x}_i\right|\right)}{n} \tag{5.72}$$

5. **Середня арифметична похибка** визначається так:

$$\Delta\overline{x} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta\overline{x}_i\right)}{n} \tag{5.73}$$

5.2. Характеристика точності приладів

1. Клас точності приладу визначається за значеннями граничної (допустимої) зведеної відносної похибки у %: 0,2%; 0,5%; 1,5%; 2,5%; …

Похибка, що пов’язана з класом точності приладу, віднесено до

- нормальних фізичних умов

p=0,101325 МПа=760 мм рт. ст.=1 атм (фіз.);

- нормальних технічних умов

p=0,0980665 МПа=735,6 мм рт. ст.=1 ат (техн.).

Більш жорсткі умови експлуатації приладів приводять до появи додаткових похибок, які вказують в технічній документації на прилад.

2. Міра точності приладу h характеризується величиною, яка пов’язана з середнім квадратичним відхиленням випадкової похибки:

$$h = \frac{1}{\sigma_{\Delta}\sqrt{2}} \tag{5.74}$$

3. Чутливість приладу s характеризується відношенням відхилення індикаторів приладу Δh до зміни вимірювальної величини ΔQ, яка викликала ці відхилення зміни:

$$S = \frac{\Delta h}{\Delta Q} \tag{5.75}$$

4. Поріг чутливості приладу уявляє собою найменше значення вимірювальної величини, яке спроможне викликати помітні відхилення індикатора приладу.

5. Розв’язальна здатність приладу уявляє собою мінімальну зміну вимірювальну величину, яка може бути зафіксована приладом та дослідником (оператором) з урахуванням ґрадуювання шкали, точності розшифровки осцилоґрам, діаґрам тощо.