**Лекція 5.**

**Тема.** Систематичні похибки вимірювань

**План лекції**

5.1. Класифікація та причини виникнення систематичних похибок.

5.2. Випадкові похибки.

5.3. Закони розподілу випадкових похибок.

**Класифікація та причини виникнення систематичних похибок**

На відміну від випадкових, систематичні похибки результата вимірювань залишаються постійними або закономірно змінюваласьються в процесі вимірювання і не залежать від числа виконаних з вимірювань. Тобто мінімізувати систематичну похибку за рахунок збільшення числа вимірювань не можна. З цією метою необхідно оптимізувати саму процедуру вимірювання або використовувати средства вимірювань з меншою систематичною похибкою.

У той же час зі збільшенням числа вимірювань зменшується случайна похибка результату вимірювань, який наближається до своєму математичному очікуванню, що призводить до зменшення похибки оцінки систематичної похибки, яка є- різницею між результатом вимірювання (аналізу) при виконанні багаторазових спостережень (паралельних визначень) істинним значенням вимірюваної величини. Тому на відміну від самої систематичної похибки, яка є постійною величиною, її експериментально знайдене значення завжди є випадковою величиною, як будь-який результат вимірювання, і, відповідно, може характеризуватися визначеними межами довірчого інтервалу.

Причини виникнення систематичних похибок або апріорно відомі, або можуть бути з'ясовані в ході виконання спеціально поставлених експериментів. Разом з тим необхідність в з'ясуванні причин виникнення і в усуненні систетичних похибок виникає далеко не завжди, а тільки в тих випадках, коли вони співвідносяться з випадковою похибкою і не дозволяють виконати вимір із заданою точністю.

Залежно від наявності апріорної інформації про величину і причини виникнення систематичні похибки поділяються на три типи. До систематичних похибок першого типу відносяться похибки відомої природи, значення яких можуть бути розлічені апріорно. Такі систематичні похибки в метролог.

**Систематичні і випадкові похибки.** Систематичні похибки можуть бути сталими і змінними. Змінні систематичні похибки поділяють на прогресуючі, періодичні і такі, що змінюються за складним законом.

*Прогресуючими* називають такі систематичні похибки, які постійно зростають або зменшуються.

*Періодичними* вважають систематичні похибки, знак і значення яких періодично змінюються.

Систематичні похибки, що змінюються за складним законом, можна виразити графічно або аналітично. Якщо це дуже складно, то їх доцільніше зарахувати до випадкових похибок.

Одним із завдань вимірювального експерименту є виявлення систематичних похибок. Важливість його полягає в тому, що така невиявлена похибка набагато не безпечна, ніж випадкова, бо вона постійно спотворює результат вимірювання.

Кінцевою метою виявлення систематичних похибок є їх вилучення і врахування. Під вилученням систематичних похибок розуміють зменшення їх значень до рівня окремих невеликих складових випадкової похибки. Не вилучені залишки систематичних похибок трактуються як випадкові.

Універсального способу вилучення систематичних похибок немає. Серед відомих способів найпоширенішими є такі:

- вилучення джерел похибок, переважно похибок установлення;

- попереднє визначення похибок і їх урахування шляхом введення поправок, знайдених при перевірці засобів вимірювання, включаючи поправки на додаткові похибки.

До спеціальних способів вилучення систематичних похибок належать: спосіб заміщення, спосіб компенсації похибки за знаком, спосіб протиставлення, спосіб симетричних спостережень.

*Спосіб заміщення* полягає в тому, що спочатку на вхід вимірювального приладу подають вимірювану величину, а потім замінюють її величиною з таким відомим зна­ченням *хД*, при якому показ приладу залишається попереднім. Отже, невідоме значення вимірюваної величини *X* знаходять за відомим значенням *хД* , відтвореним мірою при заміщенні.

*Спосіб компенсації* похибки за знаком полягає в тому, що дану величину вимірюють двічі, але умови вимірювання змінюють так, щоб стала систематична похибка, яка підлягає вилученню (відома за походженням, але невідома за значенням), входила в результати вимірювань з протилежними знаками. Тоді середнє арифметичне результатів стає вільним від цієї похибки.

Спосіб компенсації похибки можна використати для вилучення похибок, джерела яких мають направлену дію. Однак, якщо похибка така, що прогресує, то цей спосіб забезпечує тільки часткове її вилучення.

*Спосіб протиставлення* полягає в тому, що вимірювана величина двічі порівнюється з величиною, яка відтворюється мірою, причому перед другим порівнянням вони взаємно міняються місцями у вимірювальному колі. Результат вимірювання у вигляді середнього пропорційного між значеннями міри при першому і другому порівняннях зовсім не залежить від коефіцієнта передачі вимірювальної схеми. Тому стала систематична похибка цього коефіцієнта, яка існує при одноразовому вимірюванні, повністю вилучається.

**Випадкові похибки.** Випадкові похибки виникають внаслідок випадкових та не­передбачених змін властивостей засобів і умов вимірювання та властивостей органів чуття спостерігача. Вони можуть бути зумовлені недосконалістю методу вимірювання, тобто недостатньою обґрунтованістю його теорії або допущеними спрощеннями, внаслідок чого не тільки значення, але й знаки похибок залишаються невідомими, випадковими є невизначені за своєю величиною або недостатньо вивчені похибки, в появі різних значень яких нам не вдається встановити закономірності. Вони визначаються складною сукупністю причин, які трудно проаналізувати, їх значення не можуть бути передбачені, а для всього їх загалу можна встановити закономірність лише для частоти появи їх різних значень. Присутність випадкових похибок (на відміну від систематичних) легко виявляється при повторних вимірюваннях, як деякий роз­кид результатів. Переважно поява випадкових похибок є стаціонарним випадко­вим процесом.

Якщо значення, які може набувати випадкова величина, утворюють дискретний (скінченний або нескінченний) ряд чисел, то така випадкова величина називається дискретною. Якщо ж значення випадкової величини заповнюють цілий проміжок (скінченний або нескінченний), то випадкову величину називають неперервною.

Кожному значенню випадкової величини *хn* дискретного типу відповідає певна ймовірність *р*п її появи. Кожному проміжку (*а, b*) із області значень випадкової величини неперервного типу також відповідає певна ймовірність *р*(*а* < *х* < *b*) того, що значення випадкової величини буде в певному проміжку.

Співвідношення, які встановлюють зв'язок між можливими значеннями ви­падкових величин і їх ймовірностями, називають законом розподілу випадкової вели­чини. Закон розподілу дискретної випадкової величини задається рядом розподілу. Тому різноманітність величин випадкових похибок характеризують вказуванням закону розподілу їх ймовірностей або вказуванням параметрів цього закону, розвинутих в теорії ймовірностей і в теорії інформації.

Випадкові похибки описуються функціями розподілу: інтегральною і диференційною.

Інтегральною функцією розподілу результатів спостережень називають за­лежність ймовірності того, що результат спостережень *х*і в і-му досліді виявиться меншим, ніж деяке біжуче значення *х* від самої величини *X*:

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image059.gif | (3.4)  |

де *Р* – символ імовірності події, вказаної у фігурних дужках.

Значення інтегральної функції в точці *X* числове дорівнює імовірності того, що випадкова величина *хі* внаслідок і-го спостереження виявиться лівіше від точки *X*. При переміщенні точки *X* вздовж осі *ОХ* ця ймовірність буде, напевно, змінюватись, але зменшитися при переміщенні вправо вона не може. Тому інтегральна функція розподілу є неспадною функцією аргументу. Загалом її значення при переміщенні точки *X* із "–" в "+" змінюється від 0 до 1. Теоретична інтегральна функція неперервна, тобто результат спостереження може мати яке завгодно наперед вибране значення з нульовою ймовірністю. Практично роздільча властивість вимірювальних засобів ділить всю область значень вимірюваної величини на відрізки, в котрих спостерігач не відрізняє зміни вимірюваної величини. Тому в межах кожного відрізка інтегральна функція розподілу зберігає постійне значення і стрибкоподібно змінюється при переході границі до якогось кінцевого значення. В цифрових вимірювальних системах ці сходинки конкретно відповідають одиницям останнього розряду, а в аналогових – якійсь часточці ціни поділки.

Але переважно згадані вище обставини не забороняють вважати інтегральну функцію розподілу результатів спостережень безперервною функцією і це спрощує аналіз випадкових похибок.

Похибку Δ можна розглядати також як випадкову величину, що набуває в різних дослідах різного значення Δі. Початок координат для похибок Δ відповідає значенню *Х* = *х*. Інтегральна функція розподілу похибок відповідає інтегральній функції розподілу результатів спостережень *хі*

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image061.gif | (3.5)  |

У метрології при розгляданні випадкових похибок вимірювання частіше засто­совують диференціальну функцію розподілу, котра є функцією, похідною від інтегральної за своїм аргументом

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image063.gif | (3.6)  |

Диференціальну функцію розподілу *рх*(*х*) часто називають щільністю ймовір­ностей, а її графічну форму – кривою розподілу. Найчастіше ця крива має форму дзвона (рис. 2).



Рис. 2. Функції розподілу: *а* – інтегральна; *б* – диференціальна

Інтегруванням диференційної функції розподілу легко отримати інтегральну функцію

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image067.gif | (3.7)  |

Для щільності ймовірностей мають виконуватись такі умови:

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image069.gif |    |

Другу умову називають умовою нормування щільності ймовірностей. Це значить, що площа під кривою розподілу в межах -∞ ... +∞ дорівнює одиниці, або інакше кажучи – ймовірність появи результату спостереження у вказаному інтервалі є вірогідною подією. Розмірність щільності ймовірності випадкової величини *х* виражається як *х-1*. Добуток *р(х)dх* називається елементом ймовірності і він дорівнює ймовірності того, що випадкова величина *х* буде мати значення в інтервалі *dх*. Якщо крива розподілу *р(х)* відома, то можна визначити ймовірність попадання результату спостереження в будь-який заданий інтервал *х1*, *х2*

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image071.gif | (3.8)  |

Знаючи інтегральну функцію розподілу, ймовірність попадання результату спостереження *х* у вказаний інтервал визначають за різницею значень функції розподілу на межах цього інтервалу

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image073.gif | (3.9)  |

Ймовірність попадання результатів спостережень в заданий інтервал *х2* – *х1* можна визначати графічним способом за інтегральною функцією розподілу (рис. 3, *а*) і за кривою розподілу щільності ймовірності (рис. 3, *б*).

У першому випадку шукана ймовірність визначається різницею значень ординат, що відповідають аргументам *х1* і *х2*, а в другому випадку – площею під кривою розподілу, що обмежена вздовж осі *х* значеннями *х1* та *х2*. Отже, за кривою розподілу можна довідатись, які інтервали значень випадкових похибок більш ймовірні, а які менш ймовірні. За кривою розподілу випадкових розмірів *х* (рис. 3, *б*) можна твердити, що ймовірності зростають при наближенні до деякої частини кривої, котра виглядає як середня, а потім зменшуються, прямуючи до нуля. При повторних вимірюваннях одної і тої ж фізичної величини *X* максимальна ймовірність припадає на значення, близькі до істинного *X*. Для значень *х*, що дуже відрізняються від *X*, ймовірність зменшується при збільшенні цієї різниці *х*-*Х*, тобто більшим похибкам відповідає менша ймовірність їх появи. Якщо припустити, що причини, які спричиняють похибки вимірювання, проявляють себе випадково, то нема підстав твердити що якісь похибки (додатні або від'ємні) мають більшу імовірність. Тому можливим є прийняти за оцінку істинного значення вимірюваної величини таке значення, що відповідає центру ваги площі фігури, обмеженої кривою розподілу та віссю абсцис. Координата, що відповідає центру ваги, називається *математичним сподіванням*.



Рис. 3. Ймовірність попадання результатів спостережень

в заданий інтервал

Математичне сподівання визначається як початковий момент першого порядку кривої розподілу

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image077.gif | (3.10)  |

Отже, математичне сподівання випадкової величини *х* є деяким постійним числом, що є параметром розподілу. Числове значення вимірюваної величини, що від­повідає математичному сподіванню, приймають за оцінку істинного значення *X*, тобто

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image079.gif | (3.11)  |

Але при визначенні емпіричної кривої розподілу математичне сподівання переважно не збігається з істинним значенням вимірюваної величини.

Розподіл випадкової величини для загального випадку показаний на рис. 4.



Рис. 4. Характеристики випадкової похибки

З рис. 4 видно, що оцінка істинного значення *м*[*х*] відрізняється від істинного значення *X* на деяку Δ*т*, котра є математичним сподіванням похибки вимірювання. Знайдемо математичне сподівання похибки вимірювання

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image083.gif | (3.12)  |

Математичне сподівання похибки вимірювання становить деяку середню постійну похибку, котра повторюється в кожному і-му спостереженні. Цю похибку позначимо Δ*т*, і назвемо систематичною похибкою. Дослідження процесів вимірювання показує, що систематична похибка інколи не залишається постійною, а змінюється плавно за якимось законом. Виникнення систематичної похибки є наслідком дії одної або декількох причин, що мають постійний або дещо змінний характер. Наприклад, неправильне настроювання нуля вимірювального приладу призводить до систематичної похибки, яка буде присутня в результаті кожного окремого спостереження.

Строгіше систематична похибка визначається як відхилення математичного сподівання результатів спостережень від істинного значення вимірюваної величини

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image085.gif | (3.13)  |

а випадкова похибка – як різниця між результатом одноразового спостереження і математичним сподіванням результатів

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image087.gif | (3.14)  |

Отже, кожну похибку одноразового спостереження можна представити сумою систематичної та випадкової похибок

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image089.gif | (3.15)  |

Такий стан проілюстровано на рис. 4.

При застосуванні цих умовних позначень істинне значення вимірюваної величини визначається так:

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image091.gif | (3.16)  |

Якщо врахувати, що систематична похибка є постійною для деякої сукупності результатів вимірювання, а випадкова змінюється і за значенням і за знаком для кожного одноразового спостереження, то істинне значення визначається так:

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image093.gif | (3.17)  |

Значення *хі* – Δ*т* називається виправленим результатом, якщо Δ*т* вдається визначити, аналізуючи експеримент. Випадкова похибка Δ*рі* залишається невідомою і вимагає чіткішого обмеження, (з врахуванням ймовірно-статистичних законів розпо­ділу). Взагалі, при одноразовому спостереженні невідомими є обидві складові похибки вимірювання, і тому результат можна подати тільки в такому вигляді:

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image095.gif | (3.18)  |

де Δ – межа похибки вимірювання (максимальне значення суми Δ*т* і Δ*р* за модулем).

**Закони розподілу випадкових похибок.**

*івномірний розподіл*. Якщо похибка вимірювання може мати з однаковою ймовірністю які завгодно значення, що не виходять за деякі межі ± Δ*n*, то така похибка описується рівномірним законом розподілу. При цьому щільність ймовірності похибки р(Δ) є постійною всередині цього інтервалу і дорівнює нулю поза ним.

Рівномірний розподіл результатів спостереження *х* показаний на рис. 5.



Рис. 5 Рівномірний розподіл випадкової величини

Для нього щільність ймовірностей аналітично можна записати так:

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image099.gifhttps://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image101.gif | (3.19)  |

Рівномірний розподіл є безмодальним, тобто не має моди, його дисперсія і середньоквадратичне відхилення , а четвертий момент та контрексцес



З таким законом розподілу добре узгоджуються похибки від тертя в опорах електромеханічних приладів, невилучені залишки систематичних похибок, похибка дискретності в цифрових приладах, похибки розмірів в межах однієї групи сортування при селективному збиранні, похибки параметрів виробів, відібраних у вужчих, ніж технологічний допуск, межах.

*Закон трикутного розподілу (закон Сімпсона).* Вигляд кривої трикутного розподілу маємо на рис. 6. За таким законом розподілені похибки суми (різниці) двох рівномірно розподілених величин.



Рис. 6 Диференційна функція трикутного розподілу

Щільність ймовірностей має такий аналітичний вираз:

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image113.gifhttps://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image115.gif | (3.20)  |

*Трапецієподібний закон розподілу.* Вигляд цього розподілу показаний на рис. 7. Похибка має такий закон розподілу, якщо вона утворюється з двох незалежних складових, кожна із яких має рівномірний закон розподілу, але з різною шириною своїх інтервалів. При послідовному з'єднанні двох вимірювальних перетворювачів, один із котрих має похибку, рівномірно розподілену в інтервалі ±Δ*х1*, а інший – похибку, рівномірно розподілену в інтервалі ±Δ*х2*, загальна похибка перетворення буде опи­суватись трапецієподібним законом розподілу. Трикутний закон розподілу є частковим випадком трапецієподібного, коли Δ*х1* = Δ*х*2.



Рис. 7 Диференційна функція трапецієподібного закону

розподілу похибок

Ці три закони розподілу мають обмежене застосування при оцінюванні ре­зультатів вимірювань, оскільки переважно похибки виникають через вплив великої кількості причин. У таких умовах розподіл похибок найкраще узгоджується з нормальним законом розподілу.

*Нормальний закон розподілу (закон розподілу Гаусса).* Цей закон є одним із найпоширеніших законів розподілу похибок, що пояснюється центральною граничною теоремою теорії ймовірностей, яка твердить, що розподіл випадкових похибок буде близьким до нормального, якщо результати спостереження формуються під впливом великої кількості незалежних факторів впливу, кожний із котрих створює лише незначну дію порівняно з сумарною дією всієї решти.

Нормальний закон має такий вираз для диференційної функції розподілу:

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image119.gif | (3.21)  |

із рівняння можна зробити висновок:

1. Густина ймовірностей має максимум при *х* = *М*[*х*];

2. Із збільшенням похибки Δ = *х* – *М*[*х*] незалежно від знака (функція парна) густина ймовірності прямує до нуля;

3. Із збільшенням середнього квадратичного відхилення ймовірність більших відхилень зростає, тобто розміри розсіюються в ширшому інтервалі.

Необхідно зауважити, що незважаючи на широке застосування нормального розпо­ділу, він все-таки є лише моделлю реальних розподілів. До речі, він відмінний від нуля вздовж всієї нескінченності осі. Тому нормально розподілена випадкова величина, хоч із малими ймовірностями, але може приймати які завгодно великі значення. Хоча очевидно, що всі вимірювані фізичні величини завжди обмежені за абсолютним значенням.

Графічно ця функція показана на рис. 8 для різних значень середнього квадратичного відхилення (σ1 < σ2).



Рис. 8 Диференційна функція нормального розподілу похибок

Функція розподілу нормальної випадкової величини має такий вигляд:

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image123.gif | (3.22)  |

Крива розподілу буде змінюватись залежно від середнього квадратичного відхилення. Але якщо виразити похибку деяким числом і середніх квадратичних відхилень, то отримаємо криву нормованого розподілу з аргументом

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image125.gif | (3.23)  |

яка описується таким виразом:

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image127.gif | (3.24)  |

Як відомо, цей вираз нормованої функції отриманий за умови, що .

Інтегральна функція нормального нормованого розподілу має такий вигляд:

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image131.gif | (3.25)  |

де аргумент *z* визначається, як і для *t*, діленням відхилення випадкової величини від математичного сподівання на середнє квадратичне відхилення

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image133.gif | (3.26)  |

Вигляд інтегральної функції нормального розподілу показано на рис. 9.



Рис. 9 Інтегральна функція нормального розподілу

Значення Ф(І) визначаються із таблиці.

*Розподіл Релея.* Цей розподіл має модуль двовимірного вектора, координати котрого розподілені нормально відносно нульових математичних сподівань і однако­вих дисперсій

|  |  |
| --- | --- |
| https://ok-t.ru/helpiksorg/baza4/119424614824.files/image137.gif | (3.27)  |

Розподіл Релея зручний для апроксимації розподілу контрольованих показників, котрі можуть бути лише з однаковим знаком. Наприклад, при контролі відхилення форми і розміщення осей та поверхонь деталей, як овальність, конусність, радіальне биття, відхилення від співосності, паралельності, перпендикулярності тощо можна описати тільки таким розподілом.