

Лекція: 2. Гідростатика. Диференціальне рівняння рівноваги Ейлера. Основне рівняння гідростатики і його практичне застосування.

**Мета:** ознайомитися з основними законами рівноваги в стані спокою для рідин і газів.

План лекції

Вступ

1. Гідростатика.
2. Диференціальне рівняння рівноваги Ейлера.
3. Основне рівняння гідростатики.

Висновки

Література

Питання

Вступ

Переважаюча більшість технологічних процесів у хімічній промисловості пов'язана з рухом рідин, газів або пари, перемішуванням у рідинах, а також з розділенням неоднорідних сумішей за допомогою відстоювання, фільтрування і центрифугування. Швидкість усіх цих процесів визначається законами гідромеханіки і вони називаються гідромеханічними. Закони гідромеханіки і практичне застосування їх вивчає гідравліка, яка складається з двох розділів:

- гідростатики (закони рівноваги в стані спокою);
- гідродинаміки (закони руху рідин і газів).

Гідродинамічні закономірності значною мірою визначають характер самих процесів, а також тепло- і масопередачі хімічних процесів у промислових апаратах.

Закони гідродинаміки найпростіші для ідеальних рідин, в яких рух відбувається без тертя, а об'єм або густина стала. Хоч жодна реальна рідина не задовольняє цим вимогам, проте багато з них при певних умовах можна розглядати як ідеальні.

**Гідростатика.**

Потоки газів або рідин можна зобразити шляхами руху окремих невеликих частин їх, що зводяться до точок. Розглянемо два типи руху рідин:

- такий, що встановився;
- такий, що не встановився.

Якщо рух рідини встановився, то в кожній точці об'єму рідини швидкість руху зберігає сталу величину і напрям.

$$\omega = \omega(x, y, z) \quad (1)$$

незмінним залишається і тиск

$$P = P(x, y, z) \quad (2)$$

Прикладом руху, що встановився, може бути витікання води з крану при постійному тиску водопровідної мережі.

Якщо рух рідини не встановився, то в кожній точці об'єму рідини швидкість і тиск змінюються з часом, тобто стають функцією не тільки координат, а й часу

$$\omega = \omega(x, y, z, \tau) \quad (3)$$

$$P = P(x, y, z, \tau) \quad (4)$$

Прикладом невстановленого руху рідини може бути витікання рідини з отвору будь-якої посудини, що відбувається під змінним напором внаслідок того, що рівень рідини в посудині знижується.

**Диференціальне рівняння рівноваги Ейлера.**

Загальні закони рівноваги і руху рідин виражаються у вигляді диференціальних рівнянь, утворених на основі уявлення про суцільне однорідне середовище. Для виведення основних закономірностей у гідравліці вводиться поняття про гіпотетичну ідеальну рідину, яка, на відміну від реальної (в'язкої) рідини, абсолютно не стискується, не змінює густину при зміні температури і не має в'язкості.

Гідростатика вивчає рівновагу рідин у стані відносного спокою, при якому під час руху рідини частинки не переміщуються одна відносно другої і сил внутрішнього тертя немає—рідина ідеальна.

Співвідношення між силами, які діють на рідину, що перебуває у стані спокою і визначають умови рівноваги рідини, виражається диференціальними рівняннями рівноваги Ейлера. Ці рівняння виводяться на основі сил, які діють на елементарний паралелепіпед, виділений в об'ємі рідини, що знаходиться у спокої. На нього діють:

- сили тяжіння, що виражаються добутком маси  $dm$  на прискорення вільного падіння  $g$  і які направлені вниз, паралельно вісі  $Z$ ;
- сили гідростатичного тиску, що діють на любую з граней паралелепіпеда і рівна добутку гідростатичного тиску на площу цієї грані. Будемо рахувати, що тиск  $P$  є функцією всіх трьох координат:  $P = f(x, y, z)$ .

Таким чином, для виводу диференціального рівняння рівноваги Ейлера в об'ємі рідини, що знаходиться в спокої, виділимо елементарний паралело- піпед об'ємом  $dV$  з ребрами  $dx, dy, dz$ , розміщеними паралельно координат  $x, y, z$ .

Згідно основного принципу статки, сума проєкцій на вісі координат всіх сил, діючих на елементарний об'єм, що знаходиться в рівновазі, рівна нулю. В протилежному випадку відбувалося би переміщення рідини.

Розглянемо суму проєкцій сил на вісь  $Z$ . Сила тяжіння направлена вниз, паралельно вісі  $Z$ . Тому при вибраному додатному напрямі вісі  $Z$  сила тяжіння буде проєктуватися на цю вісь зі знаком мінус.

$$-gdm = -g\rho dV = -\rho g dx dy dz \quad (6)$$

Сила гідростатичного тиску діє на нижню грань паралелепіпеда по нормалі до неї, і її проєкція на вісь  $Z$  рівна  $p dx dy$ . Якщо зміна гідростатичного тиску в даній точці в напрямі вісі  $Z$  рівна  $\frac{\partial p}{\partial z}$ , то по всій довжині

ребра  $dz$  воно складе  $\frac{\partial p}{\partial z} dz$ . Тоді гідростатичний тиск на протилежну (верхню) грань дорівнює  $p + \frac{\partial p}{\partial z} dz$  і проєкція сили гідростатичного тиску на вісь  $Z$

$$-(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz) dx dy \quad (7) \text{ де } dx dy - \text{ площа грані}$$

Проєкція рівнодіючої сили тиску на вісь  $Z$

$$p dx dy - (p + \frac{\partial p}{\partial z} dz) dx dy = p dx dy - p dx dy - \frac{\partial p}{\partial z} dz dx dy = - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz \quad (8)$$

Сума проєкцій на вісь  $Z$  рівна нулю, тобто

$$-\rho g dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz = 0 \quad (9)$$

або, враховуючи, що об'єм паралелепіпеда  $dx dy dz \neq 0$  (величина звідомо не рівна нулю), одержимо

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

Проєкції сил тяжіння на вісі  $x$  і  $y$  рівні 0. Тому сума проєкцій сил на вісь  $x$

$$p dy dz - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz = 0 \quad (11)$$

Звідки після розкриття дужок і скорочення

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0, \text{ або } -\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

Відповідно для вісі  $y$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz = 0, \text{ або } -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

Таким чином, умова рівноваги елементарного паралелепіпеда виражається системою рівнянь

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ця система рівнянь представляє собою диференціальне рівняння рівноваги Ейлера.

#### Основне рівняння гідростатики.

Для одержання закону розподілу тиску по всьому об'єму спокійної рідини слід проінтегрувати систему рівнянь рівноваги Ейлера.

Із рівнянь (14) видно, що тиск в спокійній рідині змінюється тільки по вертикалі (вздовж вісі  $Z$ ), залишаючись однаковим у всіх точках будь-якої горизонтальної площини, так як зміна тиску вздовж осей  $x$  і  $y$  =

0. В зв'язку з тим, що в цій системі рівнянь часткові похідні  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  і  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$  часткова похідна  $\frac{\partial p}{\partial z}$  може

бути замінена на  $\frac{dp}{dz}$  і, отже, будемо мати

$$-\rho g - \frac{dp}{dz} = 0 \quad \text{звідки}$$

$$-\rho g dz - dp = 0 \quad (15)$$

поділимо ліву і праву частину рівняння на  $\rho g$  і перемінімо знаки

$$dz + \frac{dp}{\rho g} = 0$$

Для нестискуючої однорідної рідини густина постійна і

$$dz + d\left(\frac{p}{\rho g}\right) = 0 \quad \text{або} \quad d\left(z + \frac{p}{\rho g}\right) = 0$$

Звідси після інтегрування одержимо

$$Z + \frac{p}{\rho g} = \text{const} \quad (16)$$

Для двох горизонтальних площин 1 і 2 рівняння (16) виражають у формі

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \quad (17)$$

Рівняння (16) і (17) є основними рівняннями гідростатики.

Член  $Z$  у рівнянні гідростатики, який представляє собою висоту розміщення даної точки над довільно вибраною площиною порівняння називається нівелірною висотою. У системі СІ вона виражається у метрах.

Величину  $\frac{p}{\rho g}$  називають напором тиску, або п'езометричним напором і в системі СІ вона також виражається в метрах.

Значить згідно основного рівняння гідростатики, для кожної точки рідини, що знаходиться у спокої сума нівелірної висоти і п'езометричного напору є величина постійна.

Нівелірна висота  $Z$ , яку називають також геометричним (висотним) напором, характеризує питому потенціальну енергію положення даної точки над вибраною площиною порівняння, а п'езометричний напір – питому потенціальну енергію тиску в цій точці. Сума вказаних енергій, яку називають повним гідростатичним напором, або просто статичним напором, рівна загальній потенціальній енергії, що приходить на одиницю ваги рідини.

Значить, основне рівняння гідростатики представляє собою частковий випадок закону збереження енергії: питома потенціальна енергія у всіх точках рідини, що знаходиться у спокої є величина постійна.

Рівняння (17) можна записати у вигляді

$$p_1 + Z_1 \rho g = p_2 + Z_2 \rho g$$

$$\text{або} \quad p_1 = p_2 + \rho g (Z_2 - Z_1) \quad (18)$$

Останнє рівняння є вираженням закону Паскаля, згідно якого тиск, що створюється в будь якій точці спокійної нестискуючої рідини, передається однаково всім точкам її об'єму.

Це рівняння використовується для визначення умов рівноваги в сполучених посудинах.

Маємо, наприклад, дві посудини (рис. 1.1), заповнені рідиною густиною  $\rho$ . Хай точка порівняння проходить через т. А. Якщо рахувати, що т. А належить лівій посудині, то згідно рівняння Паскаля, тиск в даній точці  $P = P_{\text{атм}} + \rho g Z_0'$ . Якщо рахувати, що т. А належить правій посудині, то  $P = P_{\text{атм}} + \rho g Z_0''$

При рівновазі для кожної точки тиск однаковий в любому напрямі (інакше би відбувалося переміщення рідини). Отже

$$P_{\text{атм}} + \rho g Z_0' = P_{\text{атм}} + \rho g Z_0'' \quad \text{або} \quad Z_0' = Z_0'' \quad (19)$$

Аналогічний висновок можна зробити для двох закритих посудин, в яких тиск над вільною поверхнею однаковий.

Таким чином, у відкритих чи закритих сполучених посудинах, які знаходяться під однаковим тиском, заповнених однорідною рідиною, рівні їх знаходяться на одній висоті незалежно від форми і поперечного перерізу посудини.

Цей принцип використовується для вимірювання рівня рідини в закритих апаратах з допомогою водомірного скла.

Якщо сполучені посудини заповнені двома незмішуваними рідинами, які мають густини  $\rho_1$  і  $\rho_2$ , то аналогічно попередньому одержимо

$$\rho_1 Z_0' = \rho_2 Z_0'' \quad \text{або} \quad \frac{Z_0'}{Z_0''} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (20)$$

Звідси видно, що в сполучених посудинах висоти рівнів різнорідних рідин над поверхнею їх розподілу обернено пропорційні густинам цих рідин.

Якщо посудини заповнені однією рідиною з густиною  $\rho$ , але тиски над рівнями рідини в них різні і дорівнюють  $P'$  і  $P''$ , то

$$P' + \rho g Z_0' = P'' + \rho g Z_0'' \quad (21)$$

Звідки різниця рівнів рідини в сполучених посудинах дорівнюватиме:

$$Z_0' - Z_0'' = \frac{P' - P''}{\rho g} \quad (22)$$

Це рівняння застосовується для вимірювання тисків або різниці тисків між різними точками за допомогою диференційних  $u$ -подібних манометрів.

Сила тиску на дно апарату визначається по висоті рівня рідини в апараті  $h$ .

$$P = (P_0 + \rho g h)S,$$

де  $S$  площа дна апарату.

Сила тиску рідини на бокову стінку визначається за глибиною занурення центра ваги стінки  $h_c$ .

$$P = (P_0 + \rho g h_c)S,$$

де  $S$  площа стінки апарату.

Сила тиску вантажного циліндра гідравлічного преса прямопропорційна відношенню квадратів діаметрів циліндрів

$$P_{гп} = P_{роб} D^2/d^2.$$

де  $P_{роб}$  – сила прикладена до робочого циліндра.

Гідравлічні преси застосовуються в хімічній промисловості для пресування і брикетування різних матеріалів.

#### Висновки

1. Основним підрозділом «Процесів і апаратів хімічних виробництв» є гідравліка, оскільки вона вивчає режими руху рідини або газів.
2. Диференційними рівняннями рівноваги Ейлера описують основні закономірності співвідношення сил, які діють на речовину в стані спокою.
3. Основне рівняння гідростатики представляє собою частковий випадок закону збереження енергії: питома потенціальна енергія у всіх точках рідини, що знаходиться у спокої є величиною постійною.

#### Література

1. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. Химия, 1973.
2. Плановский А.Н., Рамм В.М., Каган С.З. Процессы и аппараты химической технологии. Химия, 1968.
3. Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. Химия, 1969.
4. Перри Дж. Справочник инженера-химика. Химия, 1969.
5. Чернобыльский И.И., Бондарь А.Г., Гаевский Б.А. и др. Машины и аппараты химических производств. Химия, 1962.
6. Лашинский А.А., Толчинский А.Р. Основы конструирования и расчета химической аппаратуры. Машиностроение, 1970.

#### Питання

1. Що таке гідравліка.
2. Що описують закони гідростатики.
3. Що таке гідродинаміка
4. Для чого потрібно знати закони гідростатики.