

**Мета:** ознайомитися з основними законами рівноваги при русі рідин або газів.

### План лекції

#### Вступ

1. Основні характеристики руху рідин.
2. Режими руху рідини.
3. Рівняння нерозривності потоку.
4. Диференційні рівняння руху Ейлера.

#### Висновки

#### Література

#### Питання

### Вступ

Рушійною силою під час руху рідини є різниця тисків, яка створюється за допомогою насосів (компресорів), або внаслідок різниці рівнів чи густини рідин. Знаючи закони гідродинаміки, можна знаходити різницю тисків, необхідну для переміщення певної кількості рідини з потрібною швидкістю, витрату енергії на це переміщення, або навпаки—визначити швидкість і витрату рідини при відомому перепаді тисків.

### **Основні характеристики руху рідин.**

Розглянемо рух рідини по трубі постійного перерізу.

Кількість рідини, яка протікає через поперечний переріз потоку (його “живий” переріз, тобто затоплений переріз трубопроводу) в одиницю часу називається розходом рідини. Розрізняють об’ємний розхід в  $\text{м}^3/\text{с}$ , або  $\text{м}^3/\text{год}$  і масовий розхід в  $\text{кг}/\text{с}$ ,  $\text{кг}/\text{год}$ . і т.п.

В різних точках живого перерізу потоку швидкість частинок рідини неоднакова. Біля осі труби швидкість максимальна, а по мірі наближення до стінок вона зменшується. Однак в більшості випадків закон розподілу швидкостей у поперечному перерізі потоку невідомий і його важко врахувати. Тому в розрахунках використовують не істинні (локальні) швидкості, а фіктивну середню швидкість. Ця швидкість  $w$  ( $\text{м}/\text{с}$ ) виражається відношенням об’ємного розходу рідини  $Q$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) до площі живого перерізу потоку  $S$  ( $\text{м}^2$ )  $w = \frac{Q}{S}$  (23)

Звідки об’ємний розхід  $Q = wS$ . (24)

Масовий розхід  $M$  ( $\text{кг}/\text{с}$ ) визначається добутком  $M = \rho wS$  (25)

Величина  $\rho w$  представляє собою масову швидкість рідини ( $\text{кг}/\text{м}^2 \cdot \text{с}$ )

$$W = \rho w \quad \text{де } \rho - \text{густина рідини, } \text{кг}/\text{м}^3$$

**Режими руху рідини.**

Рух рідини, під час якого всі частинки її рухаються по паралельних траєкторіях і прямолінійно називається струменистим, або ламінарним.

Безладний рух, під час якого окремі частинки рідини рухаються по заплутаних, хаотичних траєкторіях, тоді як вся маса рідини в цілому переміщається в одному напрямку, називається турбулентним. У турбулентному потоці відбувається пульсація швидкостей, що приводить до інтенсивного перемішування потоку і потребує відповідно більшої витрати енергії для переміщення, ніж при ламінарному потоці.

Перехід від ламінарного до турбулентного руху відбувається тим легше, чим більша масова швидкість рідини  $\rho w$  і діаметр труби  $d$  і чим менша в'язкість рідини  $\mu$ . Рейнольдс встановив, що ці величини можна об'єднати в безрозмірний комплекс, значення якого дає уявлення про режим руху рідин. Цей комплекс має назву критерія Рейнольдса ( $Re$ )

$$Re = \frac{wd\rho}{\mu}$$

Критерій Рейнольдса  $Re$  є мірою співвідношення між силами в'язкості і інерції в рухомому потоці. Перехід від ламінарного до турбулентного руху характеризується критичним значенням  $Re_{кр}$ . Так коли рідина рухається по прямих гладеньких трубах  $Re_{кр} \approx 2320$

$Re < 2320$  – область стійкого ламінарного руху;

$2320 < Re < 10000$  – режим руху нестійкий турбулентний (перехідний);

$Re > 10000$  – область стійкого турбулентного руху.

Рівняння, що описує витрату рідини при ламінарному русі в круглій прямій трубі, називається рівнянням Пуазейля

$$Q = \frac{\pi d^4 \Delta P}{128 \mu \cdot l}$$

де  $d$  – діаметр труби;

$\Delta P$  – різниця гідростатичних тисків;

$\mu$  – в'язкість рідини;

$l$  - довжина труби.

Розглянемо співвідношення між середньою швидкістю  $w$  і максимальною швидкістю  $w_{\max}$  (яка спостерігається по осі труби) при ламінарному русі в трубі середня швидкість рідини рівна половині швидкості по осі труби:

$$w = \frac{w_{\max}}{2}$$

## **Рівняння нерозривності потоку.**

Для нестационарного руху стиснутої рідини диференціальне рівняння нерозривності потоку записується у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho \omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \omega_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{а})$$

Для сталого потоку густина не змінюється з часом, тобто  $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$  і рівняння (а) приймає вигляд

$$\frac{\partial(\rho \omega_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \omega_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \omega_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{б})$$

Для капельних рідин, які практично не стискаються, а також для газів в умовах ізотермічного потоку при швидкостях значно менших швидкості звуку,  $\rho = \text{const}$  і значить

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{в})$$

Рівняння (в) є диференціальним рівнянням нерозривності потоку рідини, що не стискається.

Сума зміни швидкостей вздовж осей координат в лівій частині рівняння (в) називається дивергенцією вектора швидкості і позначається через  $\text{div } w$ . Тому дане рівняння можна подати як

$$\text{div } w = 0$$

Для того щоб перейти від елементарного об'єму до всього об'єму рідини, яка рухається суцільним потоком (без розривів і пустот) по трубопроводу перемінного перерізу, проінтегруємо рівняння (б). Якби площа перерізу трубопроводу не змінювалася, то для сталого однонаправленого руху (в напрямі осі  $x$ ) інтегрування рівняння (б) дало би залежність  $\rho w = \text{const}$ . Якщо ж площа перерізу трубопроводу  $S$  змінна, то інтегруючи також по площі одержимо

$$\rho w S = \text{const} \quad (\text{г})$$

Для трьох різних перерізів (1-1, 2-2, 3-3) трубопроводу зображеного на рис. маємо

$$\rho_1 w_1 S_1 = \rho_2 w_2 S_2 = \rho_3 w_3 S_3 \quad (\text{д})$$

$$\text{або } M_1 = M_2 = M_3$$

де  $M = \rho w S$  – масовий розхід рідини, кг/с

Вирази (г) і (д) представляють собою рівняння нерозривності (суцільності) потоку в його інтегральній формі для сталого руху. Це рівняння називається також рівнянням постійності розходу.

Згідно рівняння постійності розходу, при сталому русі рідини, яка повністю заповнює трубопровід, через кожний його поперечний переріз проходить в одиницю часу одна і та сама маса рідини.

Для капельних рідин  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho = \text{const}$  і рівняння (г) приймає вигляд:

$$wS = \text{const}$$

Значить

$$w_1S_1 = w_2S_2 = w_3S_3 = \text{const} \quad (\text{e})$$

або  $Q_1 = Q_2 = Q_3$  де  $Q = wS$  – об'ємний розхід рідини,  $\text{м}^3/\text{с}$

З рівняння (e) слідує, що  $\frac{w_1}{w_2} = \frac{S_2}{S_1}$ , тобто швидкості капельної рідини в різних поперечних перерізах трубопроводу обернено пропорційні площі цих перерізів.

Згідно рівнянню (д) масовий розхід рідини через початковий переріз трубопроводу, рівний її розходу через кінцевий переріз трубопроводу.

## Диференційні рівняння руху Ейлера.



Розглянемо сталий потік ідеальної рідини. Вона не має в'язкості, тобто рухається без тертя.

Як і при виводі диференційного рівняння рівноваги Ейлера, виділимо в потоці елементарний паралелепіпед об'ємом  $dV = dx dy dz$  орієнтований відносно осей координат (див. рис. ).

З виводу диференційного рівняння рівноваги Ейлера ми знаємо, що проекції на осі координат сил тяжіння і тиску, діючих на паралелепіпед, складають

$$\text{Для осі } x \quad -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

$$\text{Для осі } y \quad -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz$$

$$\text{Для осі } z \quad -(\rho g + \frac{\partial P}{\partial z}) dx dy dz$$

Згідно основного принципу динаміки, сума проекцій сил, які діють на елементарний об'єм рідини, що рухається, рівна добутку маси рідини на її прискорення. Маса рідини в об'ємі паралелепіпеда  $dm = \rho dx dy dz$ . Якщо рідина рухається зі швидкістю  $w$ , то її прискорення рівне  $\frac{dw}{d\tau}$ , а проекції прискорення на осі координат  $\frac{dw_x}{d\tau}$ ,  $\frac{dw_y}{d\tau}$ ,  $\frac{dw_z}{d\tau}$ , де  $w_x$ ,  $w_y$ , і  $w_z$  — складові швидкості вздовж осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

У відповідності з основним принципом динаміки

$$\rho dx dy dz \cdot \frac{dw_x}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

$$\rho dx dy dz \cdot \frac{dw_y}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy dz$$

$$\rho dx dy dz \cdot \frac{dw_z}{d\tau} = -(\rho g + \frac{\partial P}{\partial z}) dx dy dz$$

або після скорочення

$$\left. \begin{aligned} \rho \cdot \frac{dw_x}{d\tau} &= -\frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho \cdot \frac{dw_y}{d\tau} &= -\frac{\partial P}{\partial y} \\ \rho \cdot \frac{dw_z}{d\tau} &= -(\rho g + \frac{\partial P}{\partial z}) \end{aligned} \right\} (1)$$

Система рівнянь (1)—це диференційні рівняння руху ідеальної рідини Ейлера для встановленого потоку. При невстановленому русі швидкість рідини змінюється не тільки при переміщенні частинок потоку з однієї точки простору в іншу, а й зі зміною часу в кожній точці.

## Висновки

1. За законами гідродинаміки можна знайти різницю тисків, необхідну для переміщення певної кількості рідини з потрібною швидкістю, витрату енергії на це переміщення, або навпаки—визначити швидкість і витрату рідини при відомому перепаді тисків.
2. Визначення режимів руху рідини дозволяє визначити параметри її руху для мінімізації енергетичних втрат.
3. Велику роль в контролюванні параметрів руху рідини відіграють такі прилади визначення витрати рідини як мірні діафрагми, сопла і труби Вентурі.

## Література

1. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. Химия, 1973.
2. Плановский А.Н., Рамм В.М., Каган С.З. Процессы и аппараты химической технологии. Химия, 1968.
3. Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. Химия, 1969.
4. Перри Дж. Справочник инженера-химика. Химия, 1969.
5. Чернобыльский И.И., Бондарь А.Г., Гаевский Б.А. и др. Машины и аппараты химических производств. Химия, 1962.
6. Лазинский А.А., Толчинский А.Р. Основы конструирования и расчета химической аппаратуры. Машиностроение, 1970.
7. Григорьев В.А., Колач Т.А., Соколовский В.С. и др. Краткий справочник по теплообменным аппаратам. Госэнергоиздат, 1962.

## Питання

1. Що таке гідравліка.
2. Що описують закони гідродинаміки.
3. Які режими руху рідини ви знаєте? Що їх характеризує?
4. Для чого потрібно знати закони гідродинаміки.
5. Які прилади служать для визначення витрати рідини?