

Мета: ознайомитися з основними законами рівноваги при русі рідин або газів в потоці.

План лекції

Вступ

1. Рівняння Бернуллі і його практичне застосування.
2. Диференціальне рівняння руху Нав'є – Стокса.
3. Гідравлічний радіус і еквівалентний діаметр.
4. Гідравлічний опір у трубопроводах.
5. Розрахунок діаметру трубопроводу.

Висновки

Література

Питання

Вступ

Рівняння Бернуллі є окремим випадком закону збереження енергії і виражає енергетичний баланс потоку. При русі реальних рідин починають діяти сили внутрішнього тертя, обумовлені в'язкістю рідини і режимом її руху, а також сили тертя об стінки труби. Ці сили чинять опір руху рідини. На подолання гідравлічного опору повинна витратитися деяка частина енергії потоку. Тому загальна кількість енергії потоку по довжині трубопроводу буде безперервно зменшуватися внаслідок переходу потенціальної енергії в втрачену енергію—яка витрачається на тертя і безповоротно втрачається при розсіюванні тепла в навколишнє середовище. Іншим випадком закону збереження енергії під час руху в'язкої рідини є диференціальні рівняння руху реальної рідини Нав'є – Стокса, які виражають зв'язок між масовими, поверхневими, інерційними та в'язкісними силами у потоці.

Рівняння Бернуллі і його практичне застосування.

Рішення рівнянь руху Ейлера для сталого потоку приводить до одного з найбільш важливих і широко використовуваних рівнянь гідродинаміки—рівняння Бернуллі

Запишемо рівняння руху Ейлера

$$\left. \begin{aligned} \rho \cdot \frac{dw_x}{d\tau} &= -\frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho \cdot \frac{dw_y}{d\tau} &= -\frac{\partial P}{\partial y} \\ \rho \cdot \frac{dw_z}{d\tau} &= -(\rho g + \frac{\partial P}{\partial z}) \end{aligned} \right\}$$

Помножимо ліві і праві частини кожного з рівнянь руху Ейлера відповідно на dx , dy і dz і поділимо на густину ρ рідини, одержимо

$$\frac{dx}{d\tau} dw_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

$$\frac{dy}{d\tau} dw_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

$$\frac{dz}{d\tau} dw_z = -gdz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

Додамо ці рівняння, враховуючи, що похідні $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$ і $\frac{dz}{d\tau}$ виражають проекції w_x , w_y , w_z

швидкості на відповідні осі координат. Тоді

$$w_x dw_x + w_y dw_y + w_z dw_z = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) - gdz$$

Доданки лівої частини цього рівняння можуть бути представлені як

$$w_x dw_x = d\left(\frac{w_x^2}{2}\right); \quad w_y dw_y = d\left(\frac{w_y^2}{2}\right); \quad w_z dw_z = d\left(\frac{w_z^2}{2}\right)$$

Отже їх сума

$$d\left(\frac{w_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{w_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{w_z^2}{2}\right) = d\left(\frac{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}{2}\right) = d\left(\frac{w^2}{2}\right)$$

В той же час сума членів, що стоять в дужках в правій частині записаного рівняння, представляє собою диференціал тиску P (при сталих умовах тиск залежить тільки від положення точки в просторі, але в кожній даній точці не міняється з часом). Значить

$$d\left(\frac{w^2}{2}\right) = -\frac{dP}{\rho} - gdz$$

Розділимо обидві частини цього рівняння на прискорення вільного падіння g і переносячи всі члени у праву частину, маємо

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) + \frac{dP}{\rho g} + dz = 0$$

причому для нестискуючої однорідної рідини $\rho = \text{const}$

Сума диференціалів може бути замінена диференціалом суми, значить

$$d\left(z + \frac{P}{\rho g} + \frac{w^2}{2g}\right) = 0$$

Звідки

$$z + \frac{P}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} = \text{const}$$

Це є рівняння Бернуллі для ідеальних рідин.

Рівняння Бернуллі для любых двох поперечних перерізів 1 і 2 потоку (трубопроводу) можна представити у вигляді

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}$$

Величину $z + \frac{P}{\rho g} + \frac{w^2}{2g}$ називають повним гідродинамічним напором, або просто

гідродинамічним напором.

Гідродинамічний напір включає три складові, з яких перші дві складові Z і $\frac{P}{\rho g}$, входили в

основне рівняння гідростатики:

Z – нівелірна висота, яку називають також геометричним або висотним напором h_T представляє собою питому потенціальну енергію положення в даній точці (даному перерізі);

$\frac{P}{\rho g}$ - напір тиску h_T або п'єзометричний напір, характеризує питому потенціальну енергію

тиску в даній точці (даному перерізі); Сума $z + \frac{P}{\rho g}$ називається повним гідростатичним ,

або просто статичним напором і виражає повну питому потенціальну енергію в даній точці (даному перерізі);

$\frac{w^2}{2g}$ - швидкісний, або динамічний напір $h_{шв}$, який характеризує кінетичну енергію в даній точці

(даному перерізі).

Таким чином відповідно до рівняння Бернуллі при встановленому русі ідеальної рідини сума швидкісного і статичного напорів, яка дорівнює гідро-динамічному напору, не змінюється

при переході від одного поперечного перетину потоку до іншого. Разом з тим, з рівняння Бернуллі відповідно до енергетичного розуміння його членів виходить, що при встановленому русі ідеальної рідини сума потенціальної $Z + \frac{P}{\rho g}$ і кінетичної $\frac{w^2}{2g}$ енергій рідини для кожного з поперечних перетинів потоку залишається незмінною. Отже, рівняння Бернуллі є окремим випадком закону збереження енергії і виражає енергетичний баланс потоку.

У випадку горизонтально розміщеного трубопроводу $Z_1 = Z_2$ і рівняння Бернуллі для ідеальної рідини спрощується

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}$$

При русі реальних рідин починають діяти сили внутрішнього тертя, обумовлені в'язкістю рідини і режимом її руху, а також сили тертя об стінки труби. Ці сили чинять опір руху рідини. На подолання гідравлічного опору повинна витратитися деяка частина енергії потоку. Тому загальна кількість енергії потоку по довжині трубопроводу буде безперервно зменшуватися внаслідок переходу потенціальної енергії в втрачену енергію – яка витрачається на тертя і безповоротно втрачається при розсіюванні тепла в навколишнє середовище.

Для дотримання балансу енергії при русі реальної рідини у праву частину рівняння Бернуллі повинен бути введений член, який виражає втрачений напір. Тоді одержимо рівняння Бернуллі для реальних рідин

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_{\text{втр}}$$

Рівняння Бернуллі застосовують для визначення швидкості, витрати і часу витікання рідини з резервуарів, а також для визначення напору насосів.

Для визначення швидкості і витрати рідини у промисловості застосовують диференціальний манометр. Його u-подібна трубка заповнена ртуттю, водою або спиртом залежно від робочої рідини (рідина повинна не змішуватися з робочою рідиною і мати значно більшу густину, чим остання. Вода або спирт застосовуються для газів, а ртуть для рідин). Згідно результатів вимірювання h знаходять швидкість рідини вздовж осі трубопроводу. Для визначення середньої швидкості рідини або знімають епюру розподілу швидкостей по перерізу трубопроводу, пересуваючи пневматичну трубку в різні точки перерізу, або використовують співвідношення між середньою і швидкостями при ламінарному і турбулентному режимах руху. Витрату рідини розраховують як добуток середньої швидкості на площу поперечного перетину трубопроводу. Такий спосіб визначення швидкості і розходу рідини простий, але

недостатньо точний із-за труднощів установки пневматичних трубок строго вздовж осі трубопроводу.

Більш широко поширене визначення швидкостей і розходів рідин з допомогою дросельних приладів, принцип роботи яких базується на вимірюванні перепаду тисків при зміні поперечного перерізу трубопроводів. При штучному звуженні перерізу потоку з допомогою дросельного приладу швидкість v , відповідно, кінетична енергія потоку в цьому більш вузькому перетині зростає, що приводить до зменшення потенціальної енергії тиску в тому ж перетині. Тому вимірявши диференціальним манометром перепад тисків між перетинами трубопроводів до його звуження і перетином у самому звуженні (або близько біля нього) можна вчислити зміну швидкості між перетинами, а по цьому—швидкість і витрату рідини.

В якості дросельних приладів використовують мірні діафрагми, сопла і труби Вентурі.

Вимірювальна діафрагма—це диск з отвором круглого перетину, центр якого розміщений по осі труби. Вимірювальне сопло є насадкою, що має плавно заокруглений вхід і циліндричний вихід. У труби Вентурі поперечний перетин поступово звужується, а потім знову розширюється до попереднього розміру.

Диференціальне рівняння руху Нав'є – Стокса.

Диференціальні рівняння руху реальної рідини Нав'є-Стокса – виражають зв'язок між масовими, поверхневими, інерційними та в'язкісними силами у потоці, характеризують закон збереження енергії під час руху в'язкої рідини:

$$\partial p / \partial x - \rho X + \rho \partial w_x / \partial \tau - \mu \nabla^2 w_x = 0,$$

$$\partial p / \partial y - \rho Y + \rho \partial w_y / \partial \tau - \mu \nabla^2 w_y = 0,$$

$$\partial p / \partial z - \rho Z + \rho \partial w_z / \partial \tau - \mu \nabla^2 w_z = 0,$$

де $\nabla^2 w_x$, $\nabla^2 w_y$, $\nabla^2 w_z$ – оператори Лапласа, являють собою суми інших похідних по осях координат.

Згідно з другою теоремою подібності розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса можна подати у вигляді **узагальненого критеріального рівняння гідродинаміки**:

$$Eu = f(Re, Fr, No, \Gamma);$$

для сталого руху реальної рідини

$$Eu = f(Re, Fr, \Gamma),$$

де Eu – критерій Ейлера, невизначений критерій; Re , Fr , No – критерії Рейнольдса, Фруда, гомохронності, є визначеними критеріями; Γ – симплекс геометричної подібності.

У вигляді ступеневої залежності критеріальне рівняння набирає вигляду:

$$Eu = A Re^m Fr^n No^p \Gamma^q,$$

де A , m , n , p , q – сталі, що визначаються дослідним шляхом для групи подібних явищ.

В загальному випадку систему рівнянь **Нав'є-Стокса** неможливо вирішити аналітично. Рішення цих рівнянь отримані тільки для достатньо спрощених часткових завдань. При рішенні рівнянь **Нав'є – Стокса** широко використовують методи теорії подібності, які дозволяють отримати (з використанням експериментальних даних) достатньо прості функціональні залежності.

Теоретичний аналіз руху в'язкої рідини з допомогою рівнянь **Нав'є-Стокса** проводять окремо для ядра потоку і для граничного шару. При цьому в турбулентному режимі течії при достатньо великих значеннях числа Рейнольдса в ядрі потоку можна знехтувати осанніми доданками правих частин рівнянь **Нав'є-Стокса**, які характеризують сили внутрішнього тертя (оскільки вони надто малі в порівнянні з іншими доданками), і отже, можна розглядати рідину як ідеальну, тобто без в'язкості (μ) і яка не стискується ($\rho = \text{const}$). Аналіз рівнянь руху ідеальної рідини набагато простіший.

В випадку ідеальної рідини рівняння **Нав'є-Стокса** переходять в диференціальні рівняння руху Ейлера. Інтегралом цих рівнянь для встановленого потоку є рівняння Бернуллі, яке широко використовується для рішення багатьох завдань.

Гідралічний радіус і еквівалентний діаметр.

При русі рідини через переріз будь-якої форми, відмінної від круглої, в якості розрахункового лінійного перерізу приймають гідравлічний радіус або еквівалентний діаметр.

Під гідравлічним радіусом r_r (м) розуміють відношення площі затопленого перерізу трубопроводу або каналу, через який протікає рідина, тобто живого перерізу потоку до змоченого периметру

$$r_r = \frac{S}{\Pi} \quad (26)$$

де S – площа перерізу потоку рідини;

Π – змочений периметр.

Для круглої труби з внутрішнім діаметром d

$$r_r = \frac{S}{\Pi} = \frac{\pi d^2 / 4}{\pi d} = \frac{d}{4} \quad (27)$$

Діаметр виражений через гідравлічний радіус, представляє собою еквівалентний діаметр

$$d = 4 r_r \quad (28)$$

Значить згідно рівняння (26)

$$d_{\text{екв}} = \frac{4S}{\Pi} \quad (29)$$

Для каналу прямокутного перерізу зі сторонами a і b , повністю заповненого рідиною

$$r_r = \frac{S}{\Pi} = \frac{ab}{2a + 2b} = \frac{ab}{2(a + b)} \quad (30) \quad a$$

$$d_{\text{екв}} = 4 r_r = \frac{4S}{\Pi} = \frac{4ab}{2(a + b)} = \frac{2ab}{a + b} \quad (31)$$

Для каналу поперечного перерізу, в якому рідина обмежена внутрішнім і зовнішнім колами (труба в трубі) з діаметром $d_в$ і $d_з$, відповідно

$$d_{\text{екв}} = \frac{4S}{\Pi} = \frac{4(\pi d_з^2 / 4 - \pi d_в^2 / 4)}{\pi d_з + \pi d_в} = \frac{d_з^2 - d_в^2}{d_з + d_в} = d_з - d_в$$

Для круглої труби $d_{\text{екв}} = d$

Для визначення рухомої сили гідродинамічних процесів – різниці тисків між двома точками або перерізами потоків (або гідродинамічного напору H) – необхідно знати втрачений напір h_p , який складається з втрат напору на тертя $h_{тр}$ і на подолання місцевих опорів $h_{м.о.}$

1. Втрати напору на тертя визначаються за рівнянням Дарсі – Вейсбаха:

$$h_{тр} = \lambda(1/d)(w^2/2g),$$

де λ – коефіцієнт тертя, залежний у загальному випадку від режиму руху рідини та шорсткості внутрішніх стінок трубопроводу (табл.1).

В техніці зазвичай рідина рухається по трубам з стінками, які мають невеликі нерівності, виступи, які називають шорсткістю.

Шорсткість абсолютна (e) – середня висота виступів на стінці труби.

Шорсткість відносна (ε) – відношення абсолютної шорсткості e до діаметра труби d : $\varepsilon = e/d$.

Шорсткість гідравлічна – визначається співвідношенням абсолютної шорсткості e з товщиною граничного шару δ :

якщо $\delta > e$, труби називаються гідравлічно гладкими;

якщо $\delta < e$, труби називаються гідравлічно шорсткими.

Таблиця 1 – Формули для визначення коефіцієнта тертя

Найменування області	Границі області	Формула для розрахунку
Ламінарна область – гідравлічно гладкі труби	$Re < 2320$	$\lambda = 64/Re$
Турбулентна область – гідравлічно гладкі труби	$2320 < Re < 10/\varepsilon$	$\lambda = 0,11(68/Re)^{0,25}$
Турбулентна область – гідравлічно шорсткі труби	$10/\varepsilon < Re < 500/\varepsilon$	$\lambda = 0,11(68/Re + \varepsilon)^{0,25}$
Автомодельна (квадратична) область	$Re > 500/\varepsilon$	$\lambda = \varepsilon^{0,25}$

2. При протіканні рідини через звуження і розширення в трубопроводах, через крани, засувки, і т.п. крім втрат, які пов'язані з тертям, виникають незворотні втрати напору.

Отже **втрати напору на місцевих опорах** обумовлені зміною швидкості потоку за величиною та за напрямком. До місцевих опорів належать вхід у трубу та вихід із неї, раптове звуження і поширення потоку, коліна, відводи, крани, вентиля, фільтри, клапани та ін.

Методи розрахунку втрат напору на місцевих опорах:

а) за коефіцієнтом **місцевого опору**, що показує частку швидкісного напору, яка втрачається на даному опорі:

$$h_{mc} = \zeta_{mc}(w^2/2g),$$

при розрахунках ζ_{mc} вибирається за довідковими таблицями;

б) за **еквівалентною довжиною місцевого опору** ($l_e = d\zeta_{mc}/\lambda$) – довжині такої прямої труби, втрати на тертя в якій дорівнюють втраті напору на місцевому опорі:

$$h_{mc} = \lambda(l_e/d)(w^2/2g).$$

Гідравлічний опір апаратів із насадкою визначають за формулою

$$\Delta p = \lambda(H/d_e)(W^2\rho/2),$$

де $W = w_\phi/\varepsilon$ – справжня швидкість руху газу в каналах, м/с; w_ϕ – фіктивна або середня швидкість руху газу в повному перерізі апарата, м/с; ε – частка вільного об'єму апарата, м³/м³; H – висота шару насадки, м; $d_e = 4\varepsilon/\sigma$ – еквівалентний діаметр каналів насадки, м; σ – питома поверхня насадки, м²/м³.

Невід'ємною складовою частиною практично всіх хімічних виробництв є транспортування рідин і газів, що є необхідним для забезпечення нормальної роботи установок, цехів і виробництва в цілому, включаючи забезпечення його сировиною і складування готової продукції. Тому протяжність виробничих трубопроводів достатньо велика, а отже великі і затрати на їх виготовлення та експлуатацію. Оскільки при проектних розрахунках довжина трубопроводів як правило задана, основним завданням є визначення діаметру трубопроводу, а також витрати енергії на транспортування.

При відомій витраті рідини Q діаметр трубопроводу можна визначити за рівнянням витрати:

$$Q = \frac{w\pi d^2}{4}.$$

Звідси діаметр трубопроводу при d при середній швидкості рідини w :

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi w}}.$$

Отже єдиною змінною, від якої залежить діаметр трубопроводу є швидкість протікання рідини по трубопроводу w . Зі збільшенням швидкості діаметр трубопроводу зменшується, і відповідно зменшується його ціна за рахунок зменшення затрат на виготовлення трубопроводу, його монтаж і ремонт. Але при цьому збільшуються втрати напору і відповідно затрати енергії на транспортування рідини. Для визначення найбільш оптимального діаметру трубопроводу будують графічні залежності на основі техніко-економічного розрахунку від діаметру трубопроводу.

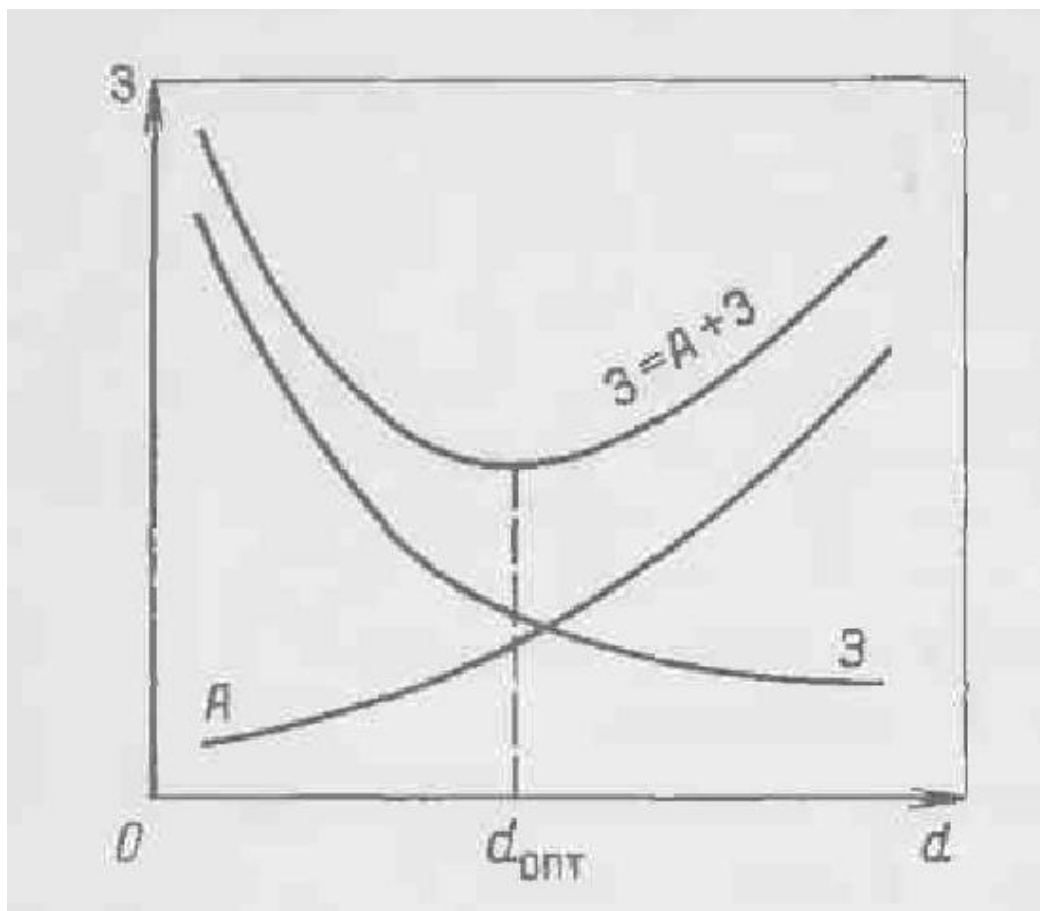


Рис.1. Визначення діаметру трубопроводу на основі техніко-економічного розрахунку.

Z – загальнорічні витрати, A – затрати на амортизацію та ремонт, z – експлуатаційні витрати (на транспортування).

Мінімум по кривій $Z=A+z$ відповідає такому діаметру трубопроводу, при якому швидкість транспортування рідини оптимальна в порівнянні з затратами. Відповідно цих даних потім визначають необхідний напір за розрахунками.

Для визначення діаметру апаратів також використовують рівняння $d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi w}}$. Але при цьому швидкість руху рідини w в апараті залежить від дуже багатьох чинників, що накладає деякі труднощі при її розрахунку.

Особливістю руху газу в трубопроводах є неперервне зниження густини газу по всій довжині трубопроводу внаслідок падіння тиску через втрати напору, що приводить до збільшення швидкості газу. При відносно невеликих перепадах тиску (що характерно для внутрішньозаводських комунікацій) для розрахунку трубопроводів використовують ті ж рівняння що і для нестикуємих рідин, з заміною w і ρ на середньоарифметичні значення w_{cp} і ρ_{cp} .

Також для розрахунку діаметру трубопроводів (штуцерів і інших деталей хімічних апаратів) можна використовувати дослідні дані по швидкостях руху рідин і газів в промислових умовах, які наведені нижче:

Середовище і умови руху	Швидкість, м/с
Малов'язкі рідини (до $\approx 0,01$ Па*с) при перекачуванні насосом	0,5-3,0
В'язкі рідини (вище $0,01$ Па*с) при перекачуванні насосом	0,2-1,0
Рідини при русі самопливом	0,1-0,5
Газу при низькому тиску (до ≈ 10 кПа)	8-15
Газу при підвищеному тиску	15-25
Насичена пара	15-25
Перегріта пара	20-50

Висновки

1. Рівняння Бернуллі застосовують для визначення швидкості, витрати і часу витікання рідини з резервуарів, а також для визначення напору насосів.
2. Велику роль в контролюванні параметрів руху рідини відіграють такі прилади визначення витрати рідини як мірні діафрагми, сопла і труби Вентурі.
3. Диференціальні рівняння руху реальної рідини Нав'є-Стокса – виражають зв'язок між масовими, поверхневими, інерційними та в'язкісними силами у потоці, характеризують закон збереження енергії під час руху в'язкої рідини.
4. Для визначення рухомої сили гідродинамічних процесів – різниці тисків між двома точками або перерізами потоків (або гідродинамічного напору H) – необхідно знати втрачений напір.
5. Для розрахунку діаметру трубопроводу потрібно провести техніко-економічний розрахунок.

Література

1. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. Химия, 1973.
2. Плановский А.Н., Рамм В.М., Каган С.З. Процессы и аппараты химической технологии. Химия, 1968.
3. Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. Химия, 1969.
4. Перри Дж. Справочник инженера-химика. Химия, 1969.
5. Чернобыльский И.И., Бондарь А.Г., Гаевский Б.А. и др. Машины и аппараты химических производств. Химия, 1962.
6. Лацинский А.А., Толчинский А.Р. Основы конструирования и расчета химической аппаратуры. Машиностроение, 1970.

Питання

1. Як отримати рівняння Бернуллі?
2. Що описує рівняння Бернуллі?
3. Що описують диференціальні рівняння руху реальної рідини Нав'є-Стокса?
4. Для чого використовують рівняння Бернуллі?
5. Які прилади служать для визначення витрати рідини?

6. Що входить до втраченого напору?

7. Як визначити діаметр трубопроводу?