ЛЕКЦІЯ

НА ТЕМУ:

ДИСПЕРСІЙНА АНАЛІЗА

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Метою більшости досліджень в хімії та хемічній промисловости є вирішення складних багатофакторних експериментальних завдань, які пов`язані зі встановлення надійних зв`язків між випадковими величинами, пошуком оптимальних рішень якости матеріалів, пошуком оптимальних умов проведення хеміко – технологічних процесів, розробкою раціональних конструкцій хемічного обладнання тощо.

Існують два різних підходи до вирішення таких завдань. Традиційні методи досліджень в хемії та хемічній технології пов`язані з «пасивним» експериментом, який потребує значних витрат і часу. У такому експерименті вирішенню експериментальних завдань передує всебічне дослідження механізму процесу та властивостей речовини. «Пасивний» експеримент пов`язаний з почерговим варіюванням окремих змінних. Базуючись на результатах такого дослідження можна створити теорію процесу, за допомогою якої можна вирішувати експериментальні завдання. Але точність і надійність таких результатів низька. Та й системи, які належить описати теоретично та оптимізувати є багатофакторними, багаторівневими та виявляються настільки складними, що не підлягають теоретичному вивченню у прийняті терміни. Окрім того, у більшості випадків експериментальні завдання вирішуються експериментально при неповному знанні механізмів процесів та явищ. Методологія находження таких рішень залишається неформалізованою.

Другий метод використовує теорію «активного» експерименту, що дозволяє вибрати оптимальну стратегію дослідження при неповноті знань про об`єкт дослідження та багатофакторному завданні. При цьому на кожному етапі дослідження використовують математичне планування експерименту.

Математичне планування експерименту базується на низці загально методичних концепцій:

1) дисперсійної аналізи;
2) регресійної аналізи;
3) кореляційної аналізи;
4) рандомізації (надання випадкового характеру реалізації дослідів та їх повторень);
5) послідовного експерименту;
6) оптимального використання факторного простору;
7) компактности інформації;
8) статистичних оцінок тощо.

Розділ 1
ДИСПЕРСІЙНА АНАЛІЗА

1.1. Статистична рівність двох ґенеральних дисперсій

1. Нехай маємо два варіаційних ряди для двох випадкових величин X та Y:

$$X:\ x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_i \le \ldots \le x_{N1}:\ \bar{x},\ S_x^2,\ S_x,\ N_x \tag{1.1}$$

$$Y:\ y_1 \le y_2 \le y_3 \le \ldots \le y_i \le \ldots \le x_{N2}:\ \bar{y},\ S_y^2,\ S_y,\ N_y \tag{1.2}$$

2. Висуваємо нульову гіпотезу: H_0: $\begin{array}{ccc} \sigma_x^2 & = & \sigma_y^2 \\ \uparrow & & \uparrow \text{ оцінки} \\ S_x^2 & \neq & S_y^2 \end{array}$

(дві ґенеральні дисперсії σ_x^2 і σ_y^2, яким дана оцінка за відповідними вибірковими дисперсіями S_x^2 і S_y^2, статистично рівні.

Альтернативною гіпотезою H_1 до нульової H_0 буде:

H_1: $\begin{array}{ccc} \sigma_x^2 & \neq & \sigma_y^2 \\ \uparrow & & \uparrow \text{ оцінки} \\ S_x^2 & \neq & S_y^2 \end{array}$

(дві ґенеральні дисперсії статистично нерівні).

Нехай: $$S_x^2 = \frac{SS_x}{f_x} > S_y^2 = \frac{SS_y}{f_y}, \tag{1.3}$$

де $f_x = N_x - 1$, $f_y = N_y - 1$ – числа відповідних ступенів вільностей.

3. Перевірку H_0 проведемо за критерієм Фішера, розрахувавши статистику F_p:

$$F_p = \frac{S_{max}^2}{S_{min}^2} = \frac{S_x^2}{S_y^2} \tag{1.4}$$

а) якщо $F_p \le F_\alpha = F_T\{\alpha;\ f_{max}=f_x=N_x\text{-}1;\ f_{min}=f_y=N_y\text{-}1\}$, то H_0 приймається з рівнем значущости α (з рівнем ймовірности $p=1\text{-}\alpha$) при обсягах двох виборок N_x та N_y, тобто дві ґенеральні дисперсії статистично рівні (дві відповідні вибіркові дисперсії статистично однорідні).

Введемо у науковий обіг означення **ступеня рівности** двох ґенеральних дисперсій:

$$\xi_1(F) = \frac{F_T(\alpha)}{F_p} \geq 1, \tag{1.5}$$

а так як ми маємо справу зі статистичними оцінками, то при цій статистичній рівности залишковий **ступінь нерівности** двох ґенеральних дисперсій дорівнює:

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T(\alpha)} < 1. \tag{1.6}$$

б) якщо $F_p > F_\alpha = F_T\{\alpha;\ f_{max}=f_x=N_x\text{-}1;\ f_{min}=f_y=N_y\text{-}1\}$, то H_0 відкидається з α ($p=1\text{-}\alpha$), приймається альтернативна гіпотеза H_1 з α ($p=1\text{-}\alpha$) та обсягами виборок N_x та N_y, тобто ґенеральні дисперсії статистично нерівні (відповідні вибіркові дисперсії статистично неоднорідні)

Введемо у науковий обіг означення **ступеня нерівности** двох ґенеральних дисперсій:

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T(\alpha)} > 1. \tag{1.7}$$

При цьому залишковий **ступінь рівности** двох ґенеральних дисперсій:

$$\xi_1(F) = \frac{F_T(\alpha)}{F_p} \leq 1. \tag{1.8}$$

1.2. Статистична рівність двох математичних сподівань

Для рядів (1.1) і (1.2) висуваємо нульову гіпотезу: H_0: $a_x = a_y$

$$\begin{array}{ccccl} a_x & = & a_y & & \\ \uparrow & & \uparrow & \text{оцінки} & \\ \bar{x} & \neq & \bar{y} & & \end{array}$$

(дві ґенеральні середні a_x і a_y, яким дана оцінка за відповідними вибірковими середніми $\bar{x}$ і $\bar{y}$, статистично рівні).

Альтернативною відносно H_0 гіпотезою буде гіпотеза H_1:

$$\begin{array}{lcccl} H_1:\ a_x & \neq & a_y & & \\ \quad\ \uparrow & & \uparrow & \text{оцінки} & \\ \quad\ \bar{x} & \neq & \bar{y} & & \end{array}$$

(дві ґенеральні середні a_x і a_y, яким дана оцінка за відповідними вибірковими середніми $\bar{x}$ і $\bar{y}$, статистично нерівні).

Перевірку H_0 проведемо за критерієм Стьюдента $t_T = t_\alpha$.

1. Якщо попередньо доведено, що ґенеральні дисперсії двох сукупностей випадковиз величин рівні $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, то розраховуємо об'єднану вибіркову дисперсію:

$$S_{xy}^2 = \frac{SS_x + SS_y}{f_x + f_y} = \frac{SS_{xy}}{f_{xy}} = \frac{f_x S_x^2 + f_y S_y^2}{N_x + N_y - 2} \tag{1.9}$$

2. Розраховуємо за абсолютною величиною статистику t_p:

$$t_p = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_{xy}\sqrt{\frac{1}{N_x} + \frac{1}{N_y}}} \right|. \tag{1.10}$$

3. а) якщо при цьому $| t_p | \le t_\alpha = t_T\{\alpha;\ f_{xy}=N_x+N_y-2\}$, то H_0 приймаємо з α ($p=1-\alpha$), тобто ґенеральні середні статистично рівні $a_x = a_y$, а вибіркові середні статистично однорідні.

Введемо у науковий обіг означення ступеня рівности двох ґенеральних середніх:

$$\xi_1(t) = \frac{t_T(\alpha)}{|t_p|} \ge 1, \tag{1.11}$$

а так як ми маємо справу зі статистичними оцінками, то при статистичній рівности залишковий ступінь нерівности двох ґенеральних середніх дорівнює:

$$\xi_2(t) = \frac{|t_p|}{t_T(\alpha)} < 1; \tag{1.12}$$

б) якщо при цьому $| t_p | \ge t_\alpha = t_T\{\alpha;\ f_{xy}=N_x+N_y-2\}$, то H_0 відкидаємо з α ($p=1-\alpha$), приймаємо H_1 з α ($p=1-\alpha$) – ґенеральні середні статистично нерівні $a_x \ne a_y$, а вибіркові середні статистично неоднорідні.

Введемо у науковий обіг означення ступеня нерівности двох ґенеральних середніх:

$$\xi_2(t) = \frac{|t_p|}{t_T(\alpha)} > 1, \tag{1.13}$$

При цьому за нерівністю залишковий ступінь рівности двох ґенеральних середніх дорівнює:

$$\xi_1(t) = \frac{t_T(\alpha)}{|t_p|} \leq 1. \tag{1.14}$$

4. Якщо попередньо доведено, що ґенеральні дисперсії двох сукупностей випадкових величин статистично нерівні $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, то розраховуємо за абсолютною величиною статистику t_p:

$$t_p = \left| \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{N_x} + \frac{S_y^2}{N_y}}} \right|. \tag{1.15}$$

а) якщо при цьому $|t_p| \leq t_\alpha = t_T\{\alpha; f\}$, то H_0 приймаємо з α ($p=1-\alpha$), тобто ґенеральні середні статистично рівні $a_x = a_y$, а вибіркові середні статистично однорідні зі ступенем рівности двох ґенеральних середніх:

$$\xi_1(t) = \frac{t_T(\alpha)}{|t_p|} \geq 1, \tag{1.16}$$

а залишковий ступінь нерівности становить:

$$\xi_2(t) = \frac{|t_p|}{t_T(\alpha)} < 1. \tag{1.17}$$

б) якщо при цьому $|t_p| \geq t_\alpha = t_T\{\alpha; f\}$, то H_0 відкидаємо з α ($p=1-\alpha$), тобто приймаємо H_1 з α ($p=1-\alpha$) – ґенеральні середні статистично нерівні $a_x \neq a_y$, а вибіркові середні статистично неоднорідні зі ступенем нерівности:

$$\xi_2(t) = \frac{|t_p|}{t_T(\alpha)} > 1, \tag{1.18}$$

а залишковий ступінь рівности становить:

$$\xi_1(t) = \frac{t_T(\alpha)}{|t_p|} \leq 1. \tag{1.19}$$

Теоретичні значення критерію Стьюдента вибирають із таблиць для числа ступенів вільностей:

$$f = \frac{f_x \cdot f_y}{f_y c^2 + (1-c)^2 f_x}, \tag{1.20}$$

де $c = \dfrac{S_x^2 / N_x}{S_x^2 / N_x + S_y^2 / N_y}$ (якщо $S_x^2 > S_y^2$). (1.21)

1.3. Однофакторний експеримент

1.3.1. Статистична рівність ряду ґенеральних дисперсій

1. Нехай виконується реальний експеримент під час дослідження y=f(x).

2. Експеримент сплановано таким чином, що фактор X варіюється на N рівнях (i); на кожному рівні плануємо повторні досліди n_i-раз.

3. Модель експерименту:

$$a_y = a_0 + \Phi_i + \varepsilon_{ij}, \tag{1.22}$$

де a_0 – середній результат;

Φ_i – ефект від x-фактора на i-рівні;

ε_{ij} – помилка досліду на i-рівні при j-повторі.

План експерименту подано в табл. 1.1.

4. Всім дослідам, включаючи і повторні, присвоєно номери, згідно цих чисел досліди рандомізовано у часі за таблицею випадкових чисел.

5. Результати експерименту занесені в табл. 1.1.

6. Розрахуємо середню кожного ряду:

$$\bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i}. \tag{1.23}$$

7. Розраховуємо загальну середню:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{\sum_{i=1}^{N} n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i}. \tag{1.24}$$

Таблиця 1.1

План та результати експерименту

Рівень фактора X (i)	Повторні досліди						n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2	S_i
	1	2	…	j	…	n_i				
1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1j}	…	y_{1n1}	n_1	$\bar{y}_1$	S_1^2	S_1
2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2j}	…	y_{2n2}	n_2	$\bar{y}_2$	S_2^2	S_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	y_{i1}	y_{i2}	…	y_{ij}	…	y_{ini}	n_i	$\bar{y}_i$	S_i^2	S_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	y_{N1}	y_{N2}	…	y_{Nj}	…	y_{NnN}	n_N	$\bar{y}_N$	S_N^2	S_N

8. Розрахуємо дисперсію в ряду:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n_i - 1} = \frac{SS_i}{f_i}, \qquad (1.25)$$

де число ступенів вільностей для дисперсії результатів i-ряду:

$$f_i = n_i - 1. \qquad (1.26)$$

9. Розраховуємо загальну дисперсію всього експерименту:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i \cdot S_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - N} = \frac{SS}{f_2}, \qquad (1.27)$$

де $f_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - N$ - число ступенів вільностей для дисперсії всіх результатів табл. 1.1. (1.28)

У разі, коли n_i = const = n:

$f_2 = N(n - 1)$. (1.29)

10. Процедурою доведемо або приймаємо, якщо для цього є підстави, що результати у кожному ряду підпорядковані нормальному закону розподілу (н.з.р.).

11. Висуваємо нульову гіпотезу:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_i^2 = \ldots = \sigma_N^2$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \text{оцінки}$$

$$S_1^2 \neq S_2^2 \neq \ldots \neq S_i^2 \neq \ldots \neq S_N^2$$

(ряд ґенеральних дисперсій статистично рівний).

12. Альтернативною до нульової H_0 буде гіпотеза H_1:

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \ldots \neq \sigma_i^2 \neq \ldots \neq \sigma_N^2$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \text{оцінки}$$

$$S_1^2 \neq S_2^2 \neq \ldots \neq S_i^2 \neq \ldots \neq S_N^2$$

(ряд ґенеральних дисперсій статистично нерівний).

Перевірка нульової гіпотези H_0:

1) якщо n_i = const = n, то H_0 перевіряють **за критерієм Кохрана (Кохрена, Кокрана, Кокрена),** розраховуючи статистику:

$$G_p = \frac{S_{i\,max}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2} \tag{1.30}$$

де $S_{i\,max}^2$ – максимальна дисперсія у ряду дисперсій;

$\sum_{i=1}^{N} S_i^2$ - сума N дисперсій всього ряду, включаючи і $S_{i\,max}^2$.

а) якщо при цьому $G_p \leq G_\alpha = G_T\ \{\alpha;\ N;\ f_i = n_i - 1 = n - 1\}$, де $G_\alpha = G_T$ – табличне значення критерія Кохрана, то H_0 приймаємо з α (р = 1 – α) – ряд ґенеральних дисперсій статистично рівний (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично однорідний).

Введемо в науковий обіг означення ступеня рівности ряду дисперсій за критерієм Кохрана:

$$\xi_1(G) = \frac{G_т(\alpha)}{G_р} \geq 1, \tag{1.31}$$

при цьому через статистичні оцінки залишковий ступінь нерівности ряду дисперсій за критерієм Кохрана становить:

$$\xi_2(G) = \frac{G_р}{G_т(\alpha)} < 1. \tag{1.32}$$

б) якщо при цьому $G_p > G_T\ \{\alpha;\ N;\ f_i = n_i - 1 = n - 1\}$, то H_0 відкидаємо з α (р = 1 – α), тобто приймаємо H_1 з α (р = 1 – α) – ряд ґенеральних дисперсій статистично нерівний (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично неоднорідний).

Введемо в науковий обіг означення ступеня нерівности ряду дисперсій за критерієм Кохрана:

$$\xi_2(G) = \frac{G_р}{G_т(\alpha)} > 1. \tag{1.33}$$

при цьому через статистичні оцінки залишковий ступінь рівности ряду дисперсій за критерієм Кохрана становить:

$$\xi_1(G) = \frac{G_т(\alpha)}{G_р} \leq 1. \tag{1.34}$$

2) **якщо n_i = const або $n_i \neq$ const**, то H_0 перевіряють **за критерієм Фішера,** розраховуючи статистику F_p:

$$F_p = \frac{S^2_{max}}{S^2_{min}}, \tag{1.35}$$

де $S_i^2{}_{max}$, $S_i^2{}_{min}$ – максимальна та мінімальна дисперсія відповідно, які вибрані із ряду дисперсій;

а) якщо при цьому $F_p \leq F_\alpha = F_T\{\alpha;\ f_{max}=N_{imax}-1;\ f_{min}=N_{imin}-1\}$, де $F_\alpha = F_T$ – табличне значення критерія Фішера, то H_0 приймається з α (p=1-α) – ряд ґенеральних дисперсій статистично рівний (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично однорідний).

Введемо в науковий обіг означення ступеня рівности ряду дисперсій за критерієм Фішера:

$$\xi_1(F) = \frac{F_T(\alpha)}{F_p} \geq 1, \tag{1.36}$$

при цьому через статистичні оцінки залишковий ступінь нерівности ряду дисперсій при їх статистичній рівности за критерієм Фішера становить:

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T(\alpha)} < 1. \tag{1.37}$$

б) якщо при цьому $F_p > F_\alpha = F_T\{\alpha;\ f_{max};\ f_{min}\}$, то H_0 відкидається з α (p=1-α), приймається альтернативна гіпотеза H_1 з α (p=1-α) – ряд ґенеральних дисперсій статистично нерівний (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично неоднорідний).

Введемо в науковий обіг означення ступеня нерівности ряду дисперсій за критерієм Фішера:

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T(\alpha)} > 1, \tag{1.38}$$

при цьому через статистичні оцінки залишковий ступінь рівности ряду дисперсій при їх статистичній нерівности за критерієм Фішера становить:

$$\xi_1(F) = \frac{F_T(\alpha)}{F_p} \le 1. \tag{1.39}$$

3) якщо $\mathbf{n_i}$ **= var**, то для перевірки H_0 застосовують більш точний **критерій Бартлета** (точніше критерій Пірсона χ^2 у формі Бартлета), розраховуючи статистику χ^2_p:

$$\chi_p^2 = \frac{1}{c}\left[\left(f_2 \ln S_2^2\right) - \sum_{i=1}^{N}(f_i \ln S_i^2)\right], \tag{1.40}$$

де $$c = \frac{1}{\ln 10}\left[1 + \frac{1}{3f_1}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{f_i} - \frac{1}{f_2}\right)\right]. \tag{1.41}$$

$f_i=n_i-1$; $f_1=N-1$; $f_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - N$;

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}{f_i};$$

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(f_i \cdot S_i^2\right)}{f_2};$$

де N – число дисперсій (табл. 1.1).

Якщо при цьому $\chi^2_p \le \chi^2_\alpha = \chi^2_т$ {α; f_1}, де $\chi^2_\alpha = \chi^2_т$ – табличне значення критерія Пірсона, то H_0 приймається з α (p=1-α) – ряд ґенеральних дисперсій статистично рівний (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично однорідний).

Введемо в науковий обіг означення ступеня рівности ряду дисперсій за критерієм Пірсона у формі Бартлета:

$$\xi_1(\chi^2) = \frac{\chi_T^2(\alpha)}{\chi_p^2} \geq 1. \tag{1.42}$$

при цьому через статистичні оцінки залишковий ступінь нерівности ряду дисперсій при їх статистичній рівности за критерієм Пірсона у формі Бартлета становить:

$$\xi_2(\chi^2) = \frac{\chi_p^2}{\chi_T^2(\alpha)} < 1. \tag{1.43}$$

Якщо при цьому $\chi^2_р > \chi^2_т$ {α; f_1}, то H_0 відкидається з α (p=1-α). Приймаємо H_1 – ряд ґенеральних дисперсій статистично нерівний (відповідний ряд вибіркових дисперсій статистично неоднорідний).

Введемо в науковий обіг означення ступеня нерівности ряду дисперсій за критерієм Пірсона у формі Бартлета:

$$\xi_2(\chi^2) = \frac{\chi_p^2}{\chi_T^2(\alpha)} > 1. \tag{1.44}$$

при цьому через статистичні оцінки залишковий ступінь рівности ряду дисперсій при їх статистичній нерівности за критерієм Пірсона у формі Бартлета становить:

$$\xi_1(\chi^2) = \frac{\chi_T^2(\alpha)}{\chi_p^2} \leq 1. \tag{1.45}$$

1.3.2. Порівняння двох виборок за їх ознаками

1. У табл. 1.2 приведений приклад статистичних даних за ознаками для двох об'єктів порівняння.

У табл. 1.2: n_{1i}, n_{2i} – абсолютні частоти зустрічі ознак у відповідній виборці;

ω_{1i}, ω_{2i} - відносні частоти зустрічі ознак у відповідній виборці;

k – кількість ознак;

N_1, N_2 – загальна сума абсолютних ознак у відповідній виборці.

Таблиця 1.2

i	Назва ознаки	Об'єкт 1		Об'єкт 2	
		n_{1i}	$\omega_{1i} = \frac{n_{1i}}{N_1}$	n_{2i}	$\omega_{2i} = \frac{n_{2i}}{N_2}$
1	LiCl	n_{11}	ω_{11}	n_{21}	ω_{21}
2	NaCl	n_{12}	ω_{12}	n_{22}	ω_{22}
⋮	NaF, NaBr…	⋮	⋮	⋮	⋮
i	KCl	n_{1i}	ω_{1i}	n_{2i}	ω_{2i}
⋮	KF, KBr…	⋮	⋮	⋮	⋮
k	CsCl	n_{1k}	ω_{1k}	n_{2k}	ω_{2k}
		$N_1 = \sum_{i=1}^{k} n_{1i}$	1,0	$N_2 = \sum_{i=1}^{k} n_{2i}$	1,0

2. Висуваємо нульову гіпотезу:

H_0: немає статистичної різниці (відмінности) між об'єктами 1 і 2 за їх структурами.

Альтернативною до H_0 буде гіпотеза:

H_1: між об'єктами 1 і 2 існує статистична різниця (відмінність) за їх структурами.

3. Розраховуємо статистику $\chi^2{}_p$:

$$\chi_p^2 = N_1 N_2 \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{\left(\frac{n_{1i}}{N_1} - \frac{n_{2i}}{N_2} \right)^2}{n_{1i} + n_{2i}} \right] = N_1 N_2 \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{(\omega_{1i} - \omega_{2i})^2}{n_{1i} + n_{2i}} \right], \qquad (1.46)$$

а) якщо $\chi^2{}_p \le \chi^2{}_\alpha = \chi^2{}_т$ {α; f}, де $\chi^2{}_\alpha = \chi^2{}_т$ – табличне значення критерія Пірсона; f=k-1, то H_0 приймається з α (p=1-α) – між двома вибірками відсутня статистична різниця (відмінність).

Ступінь статистичної однаковости:

$$\xi_1(\chi^2)=\frac{\chi_T^2(\alpha)}{\chi_p^2}\geq 1. \tag{1.47}$$

Ступінь статистичної відмінности:

$$\xi_2(\chi^2)=\frac{\chi_p^2}{\chi_T^2(\alpha)}<1. \tag{1.48}$$

б) якщо $\chi^2_{розр} > \chi^2_{т}$ {α; f}, то H_0 відкидається з α (p=1-α). Приймаємо H_1.

Ступінь статистичної відмінности:

$$\xi_2(\chi^2)=\frac{\chi_p^2}{\chi_T^2(\alpha)}>1. \tag{1.49}$$

Ступінь статистичної однаковости:

$$\xi_1(\chi^2)=\frac{\chi_T^2(\alpha)}{\chi_p^2}\leq 1. \tag{1.50}$$

Ступінь сумарної статистичної однаковости та відмінности:

$$\xi_{12}=\xi_1+\xi_2. \tag{1.51}$$

1.3.3. Рівність ряду математичних сподівань (ґенеральних середніх)

1. За результатами табл. 1.1 перевіримо рівність ряду ґенеральних середніх за відповідними вибірковими середніми.

2. Висуваємо нульову гіпотезу H_0: $a_{y1} = a_{y2} = \ldots = a_{yi} = \ldots = a_{yN}$

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \ \text{оцінка} \\ \bar{y}_1 & \neq & \bar{y}_2 \neq & \ldots & \neq \bar{y}_i \neq & \ldots & \neq \bar{y}_N . \end{array}$$

(ґенеральні середні статистично рівні).

3. Доводимо однорідність вибіркових дисперсій рядків (рівність відповідних ґенеральних дисперсій).

4. Доводимо або приймаємо, що результати у кожному ряду підпорядковані нормальному закону розподілу.

5. Розрахунок дисперсій:

а) Дисперсія за рівнями факторів:

$$S_1^2=\frac{SS_1}{f_1}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}_i-\bar{y})^2}{N-1},\ f_1 = N\text{-}1. \tag{1.52}$$

б) Дисперсія внутрішня (залишкова) [сумарна в середині повторних дослідів]:

$$S_2^2 = \frac{SS_2}{f_2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - N}, \; f_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - N. \tag{1.53}$$

$S_2^2 = S_\varepsilon^2$ застосовують для оцінки дисперсії помилки всього експерименту.

в) Загальна (повна) дисперсія:

$$S_3^2 = \frac{SS_3}{f_3} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - 1}, \; f_3 = \left(\sum_{i=1}^{N} n_i\right) - 1. \tag{1.54}$$

6. Аналіза:

1) Вплив фактора:

Якщо $F_p = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{S_1^2}{S_\varepsilon^2} \le F_T\{\alpha;\ f_1;\ f_2\}$, H_0 приймаємо з α ($p=1-\alpha$) (ряд ґенеральних середніх за рівнями факторів статистично рівний).

Ступінь рівности:

$$\xi_1(F) = \frac{F_T(\alpha)}{F_p} \ge 1. \tag{1.55}$$

2) тоді всі результати експерименту належать до одного фраґменту ґенеральної сукупности з нормальним законом розподілу обсягом $\sum_{i=1}^{N} n_i$ з параметрами:

$a_y \leftarrow \bar{y}$

$\sigma_y^2 \leftarrow S_3^2$

3) Довірчі інтервали та довірча ймовірність для a_y та σ_y^2:

$$p\left(\bar{y} - \frac{S_3 t_T\{\alpha; f_3\}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} n_i}} < a_y < \bar{y} + \frac{S_3 t_T\{\alpha; f_3\}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} n_i}}\right) = 1 - \alpha; \tag{1.56}$$

$$p\left(z_1^2 S_3^2 \frac{f_3}{f_3+1} < \sigma_y^2 < z_2^2 S_3^2 \frac{f_3}{f_3+1}\right) = 1-\alpha\,; \qquad (1.57)$$

або

$$p\left(\frac{f_3 S_3^2}{\chi_T^2\left\{\frac{\alpha}{2}; f_3\right\}} < \sigma_y^2 < \frac{f_3 S_3^2}{\chi_T^2\left\{1-\frac{\alpha}{2}; f_3\right\}}\right) = 1-\alpha\,. \qquad (1.58)$$

4) Якщо $F_p > F_T$, то H_0 відкидаємо.

Вплив фактора за рівнями статистично суттєвий, порівняно з помилкою експерименту.

Ступінь нерівности:

$$\xi_2(F) = \frac{F_p}{F_T(\alpha)} > 1. \qquad (1.59)$$

5) Тоді ми маємо ситуацію, коли результати експерименту кожного рядка (системи спостережень) як виборки, що взяті з відповідних ґенеральних сукупностей з нормальним законом розподілу обсягом n_i кожна з параметрами:

$a_{yi} \leftarrow \bar{y}_i$

$\sigma_y^2 \leftarrow S_2^2$.

6) Довірчі інтервали та довірча ймовірність для a_y та σ_y^2:

$$p\left(\bar{y}_i - \frac{S_2 t_T\{\alpha; f_2\}}{\sqrt{n_i}} < a_y < \bar{y}_i + \frac{S_2 t_T\{\alpha; f_2\}}{\sqrt{n_i}}\right) = 1-\alpha\,; \qquad (1.60)$$

$$p\left(z_1^2 S_2^2 \frac{f_2}{f_2+1} < \sigma_y^2 < z_2^2 S_2^2 \frac{f_2}{f_2+1}\right) = 1-\alpha\,; \qquad (1.61)$$

або

$$p\left(\frac{f_2 S_2^2}{\chi_T^2\left\{\frac{\alpha}{2}; f_2\right\}} < \sigma_y^2 < \frac{f_2 S_2^2}{\chi_T^2\left\{1-\frac{\alpha}{2}; f_2\right\}}\right) = 1-\alpha\,. \qquad (1.62)$$

7) Оцінка дисперсії середніх:

$$S_{yi}^2 = S_{\bar{y}_i}^2 = \frac{N-1}{\sum_{i=1}^{N} n_i}\left(S_1^2 - S_2^2\right) = \frac{f_1}{f_3+1}\left(S_1^2 - S_2^2\right). \qquad (1.63)$$

1.3.4. Обґрунтування нижніх і верхніх ґарантованих толерантних меж

Нижню толерантну межу знаходять для заданого рівня довірчої ймовірности γ та рівня значущости $\alpha = 1 - p$, виходячи з умови $X \geq x_н$ (1). При нормальному законі розподілу результат досліду характеризується $x_н = \bar{x} - ks$ (2), яке з довірчою ймовірністю γ гарантує в $p \cdot 100\% = (1 - \alpha) \cdot 100\%$ випадках дотримання умов (1). Рівняння (2) є оцінкою рівняння $x_н = a_x - k\sigma$.

Для верхньої толерантної межі $X \leq x_в$:

$x_в = \bar{x} + ks \xrightarrow{\text{оцінка}} x_в = a_x + k\sigma$,

$$\text{де } k = z_p\left(1 + \frac{z_\gamma}{\sqrt{2N}} + \frac{5Z_\gamma^2 + 10}{12N}\right), \qquad (1.64)$$

z_p, z_γ - квантилі нормального закону розподілу для ймовірностей p і γ.

1.4. Двофакторний експеримент

1) $y = f(x_1, x_2)$ на рівнях $N_1(i)$ та $N_2(j)$ відповідно. Кількість повторних дослідів n=const.

2) Модель експерименту:

$$a_y = a_0 + \Phi_i + \Phi_j + \Phi_{ij} + \varepsilon_{ij\nu}, \qquad (1.65)$$

де a_0 – загальний ефект;

Φ_i - ефект від x_1-фактора на i-рівні;

Φ_j - ефект від x_2-фактора на j-рівні;

Φ_{ij} – ефект взаємодії двох факторів x_1 на i-рівні та x_2 на j-рівні;

$\varepsilon_{ij\nu}$– помилка досліду на i-рівні x_1-фактора та на j-рівні x_2-фактора при ν-повторних дослідів.

3) План експерименту і результати занесені в табл. 1.3 (попередньо поведена нумерація дослідів, в т.ч. і повторних, і їх рандомізація).

Таблиця 1.3

План та результати двофакторного експерименту

j		1	2	…	j	…	N_2
i	x_{2j} \\ x_{1i}	x_{21}	x_{21}	…	x_{21}	…	x_{21}
		1 2 … ν …n	1 2 … ν …n	…	1 2 … ν …n	…	1 2 … ν …n
1	x_{11}	$y_{111}\ y_{112}\cdots y_{11\nu}\cdots y_{11n}$	$y_{121}\ y_{122}\cdots y_{12\nu}\cdots y_{12n}$	…	$y_{1j1}\ y_{1j2}\cdots y_{1j\nu}\cdots y_{1jn}$	…	$y_{1N21}\ y_{1N22}\cdots y_{1N2\nu}\cdots y_{1N2n}$
2	x_{12}	$y_{211}\ y_{212}\cdots y_{21\nu}\cdots y_{21n}$	$y_{221}\ y_{222}\cdots y_{22\nu}\cdots y_{22n}$	…	$y_{2j1}\ y_{2j2}\cdots y_{2j\nu}\cdots y_{2jn}$	…	$y_{2N21}\ y_{2N22}\cdots y_{2N2\nu}\cdots y_{2N2n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮
i	x_{1i}	$y_{i11}\ y_{i12}\cdots y_{i1\nu}\cdots y_{i1n}$	$y_{i21}\ y_{i22}\cdots y_{i2\nu}\cdots y_{i2n}$	…	$y_{ij1}\ y_{ij2}\cdots \mathbf{y_{ij\nu}}\cdots y_{ijn}$	…	$y_{iN21}\ y_{iN22}\cdots y_{iN2\nu}\cdots y_{iN2n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮
N_1	x_{1N1}	$y_{N111}\ y_{N112}\cdots y_{N11\nu}\cdots y_{N11n}$	$y_{N121}\ y_{N122}\cdots y_{N12\nu}\cdots y_{N12n}$	…	$y_{N1j1}\ y_{N1j2}\cdots y_{N1j\nu}\cdots y_{N1jn}$	…	$y_{N1N21}\ y_{N1N22}\cdots y_{N1N2\nu}\cdots y_{N1N2n}$

4) Доводимо за кожною системою спостережень, що результати підпорядковані нормальному закону розподілу.

5) Доводимо однорідність ряду дисперсій для системи спостережень.

6) Середня системи спостережень:

$$\bar{y}_{ij}=\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} y_{ij\nu}}{n} \tag{1.66}$$

7) Дисперсія в системі спостережень

$$S_{ij}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{\nu=1}^{n}\left(y_{ij\nu}-\bar{y}_{ij}\right)^2,\ f_{ij}=n-1=\mathrm{const}\,. \tag{1.67}$$

8) Зведемо середні в табл. 1.4.

9) Середня ряду:

$$\bar{y}_{i.}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{N_2}\bar{y}_{ij}}{N_2}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{N_2}\sum\limits_{\nu=1}^{n} y_{ij\nu}}{N_2 n} \tag{1.68}$$

10) Середня ґрафа:

$$\bar{y}_{.j}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N_1}\bar{y}_{ij}}{N_1}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N_1}\sum\limits_{\nu=1}^{n} y_{ij\nu}}{N_1 n} \tag{1.69}$$

Таблиця 1.4

Матриця середніх результатів для двофакторного експерименту

за системами спостережень

j		1	2	…	j	…	N_2		
i	x_{2j} \ x_{1i}	x_{21}	x_{21}	…	x_{21}	…	x_{21}	$\bar{y}_{i.}$	$S_{i.}^2$
1	x_{11}	$\bar{y}_{11}$	$\bar{y}_{12}$	…	$\bar{y}_{1j}$	…	$\bar{y}_{1N_2}$	$\bar{y}_{1.}$	$S_{1.}^2$
2	x_{12}	$\bar{y}_{21}$	$\bar{y}_{22}$	…	$\bar{y}_{2j}$	…	$\bar{y}_{2N_2}$	$\bar{y}_{2.}$	$S_{2.}^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮	⋮	⋮
i	x_{1i}	$\bar{y}_{i1}$	$\bar{y}_{i2}$	…	$\bar{y}_{ij}$	…	$\bar{y}_{iN_2}$	$\bar{y}_{i.}$	$S_{i.}^2$
⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮	⋮	⋮
N_1	x_{1N1}	$\bar{y}_{N_1 1}$	$\bar{y}_{N_1 2}$	…	$\bar{y}_{N_1 j}$	…	$\bar{y}_{N_1 N_2}$	$\bar{y}_{N_1 .}$	$S_{N1.}^2$
	$\bar{y}_{.j}$	$\bar{y}_{.1}$	$\bar{y}_{.2}$		$\bar{y}_{.j}$		$\bar{y}_{.N_2}$	$\bar{y}_{..}$	
	$S_{.j}^2$	$S_{.1}^2$	$S_{.2}^2$		$S_{.j}^2$		$S_{.N2}^2$	$S_{..}^2$	

11) Загальна середня:

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1} \bar{y}_{i.}}{N_1} = \frac{\sum_{j=1}^{N_2} \bar{y}_{.j}}{N_2} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} \bar{y}_{.j}}{N_1 N_2} = \frac{\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{\nu=1}^{n} y_{ij\nu}}{N_1 N_2 n} \tag{1.70}$$

12) Дисперсія між середніми за рядами:

$$S_1^2 = \frac{1}{N_1 - 1}\sum_{i=1}^{N_1} N_2 n\left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}\right)^2 = \frac{SS_1}{f_1}, \text{ де } f_1 = N_1 - 1. \tag{1.71}$$

13) Дисперсія між середніми за ґрафами:

$$S_2^2 = \frac{1}{N_2 - 1}\sum_{j=1}^{N_2} N_1 n\left(\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}\right)^2 = \frac{SS_2}{f_2}, \text{ де } f_2 = N_2 - 1. \tag{1.72}$$

14) Дисперсія взаємодії двох факторів:

$$S_3^2 = \frac{1}{(N_1 - 1)(N_2 - 1)}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} n\left[\bar{y}_{ij} - \left(\bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}\right)\right]^2 = \frac{SS_3}{f_3}, \text{ де } f_3 = (N_1 - 1)(N_2 - 1). \tag{1.73}$$

15) Залишкова (внутрішня) дисперсія:

$$S_4^2 = \frac{1}{N_1 N_2 (n-1)} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{\nu=1}^{n} \left(y_{ij\nu} - \bar{y}_{ij}\right)^2 = \frac{SS_4}{f_4}, \text{ де } f_4 = N_1 N_2 (n-1). \qquad (1.74)$$

16) Повна (сумарна, загальна) дисперсія:

$$S_5^2 = \frac{1}{N_1 N_2 n - 1} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{\nu=1}^{n} \left(y_{ij\nu} - \bar{y}_{..}\right)^2 = \frac{SS_5}{f_5}, \text{ де } f_5 = N_1 N_2 n - 1. \qquad (1.75)$$

17) Аналіза:

1. Висуваємо нульову гіпотезу відносно взаємодії двох факторів:

H_0: $\sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_\varepsilon^2$ – відсутність взаємодії між факторами x_1 і x_2.

$\uparrow$ $\uparrow$ оцінка

$S_3^2 \neq S_4^2$

(фактори x_1 і x_2 можуть або підсилювати один одного (синергізм), або ослаблювати один одного за впливом на y (антагонізм), або діяти незалежно).

2. Перевірка H_0:

а) Якщо $F_{0p} = \frac{S_3^2}{S_4^2} = \frac{S_3^2}{S_\varepsilon^2} > F_{0T}\{\alpha;\ f_3;\ f_4\}$, то H_0 відкидаємо з α (p=1 – α) (між факторами x_1 і x_2 існує взаємодія).

Якщо ступінь взаємодії:

$$\xi_{02}(F) = \frac{F_{0p}}{F_{0T}(\alpha)} \geq 1{,}0\text{-}1{,}15, \qquad (1.76)$$

то взаємодією можна знехтувати.

Якщо $\xi_{02} >$ 1,15-1,3, то подальші оцінки та висліди будуть приблизними. Якщо $\xi_{02} > 1{,}3$, то необхідні спеціальні методи аналізи.

б) Якщо $F_{0p} \leq F_{0T}\{\alpha;\ f_3;\ f_3\}$, то H_0 приймаємо з α (p=1 – α) (взаємодія статистично мала, порівняно з помилкою експерименту)

Ступінь малости взаємодії:

$$\xi_{01}(F) = \frac{F_{0T}(\alpha)}{F_{0p}} \geq 1, \qquad (1.77)$$

А ступінь ваговости взаємодії при цьому

$$\xi_{02}(F) = \frac{F_{0p}}{F_{0T}(\alpha)} < 1, \qquad (1.78)$$

в) Тоді дисперсію помилки $S_4^2=S_\varepsilon^2$ обєднують з дисперсією взаємодії S_3^2, утворюючи нову помилку експерименту $S_6^2=S_{34}^2$:

$$S_6^2 = S_{34}^2 = \frac{SS_3 + SS_4}{f_3 + f_4} = \frac{f_3 S_3^2 + f_4 S_4^2}{f_3 + f_4} = \frac{SS_6}{f_6} = \frac{SS_{34}}{f_{34}}, \tag{1.79}$$

де $f_6 = f_{34} = f_3 + f_4 = (N_1 - 1)(N_2 - 1) + N_1 N_2 (n-1) = N_1 N_2 n - N_1 - N_2 + 1$. (1.80)

18) Далі досліджують значущість впливу на Y фактора x_1 ,порівняно з новою помилкою експерименту, перевіряючи нульову гіпотезу:

H_0: $\sigma_1^2=\sigma_{34}^2$.

$\uparrow \quad \uparrow$ оцінка

$S_1^2 \neq S_{34}^2$

Якщо $F_{1p} = \frac{S_1^2}{S_{34}^2} >$ $F_{1T}\{\alpha;\ f_1;\ f_{34}\}$, H_0 відкидаємо з α (p=1 – α) (перший фактор суттєво впливає на Y).

Ступінь впливу:

$$\xi_{2(1)} = \frac{F_{1p}}{F_{1T}(\alpha)} > 1{,}0 \tag{1.81}$$

19) Значущість впливу другого фактора x_2:

$F_{2p} = \frac{S_2^2}{S_{34}^2} >$ $F_{2T}\{\alpha;\ f_2;\ f_{34}\}$, H_0 відкидаємо з α (p=1 – α) (другий фактор суттєво впливає на Y).

Ступінь впливу:

$$\xi_{2(2)} = \frac{F_{2p}}{F_{2T}(\alpha)} \geq 1{,}0 \tag{1.82}$$

20) Тоді маємо фрагменти (N_1N_2) генеральної сукупности, яка має н.з.р. кожна обсягом n з параметрами

$a_{yij} \leftarrow \bar{y}_{ij}$

$\sigma_y^2 \leftarrow S_{34}^2$

21) Довірчі інтервали та довірча ймовірність для a_{yij} та σ_y^2:

$$p\left(\bar{y}_{ij} - \frac{S_{34} t_T\{\alpha; f_{34}\}}{\sqrt{n}} < a_{yij} < \bar{y}_{ij} + \frac{S_{34} t_T\{\alpha; f_{34}\}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha; \tag{1.83}$$

$$p\left(z_1^2 S_{34}^2 \frac{f_{34}}{f_{34}+1} < \sigma_y^2 < z_2^2 S_{34}^2 \frac{f_{34}}{f_{34}+1}\right) = 1-\alpha\,; \tag{1.84}$$

або

$$p\left(\frac{f_{34} S_{34}^2}{\chi_T^2\left\{\dfrac{\alpha}{2}; f_{34}\right\}} < \sigma_y^2 < \frac{f_{34} S_{34}^2}{\chi_T^2\left\{1-\dfrac{\alpha}{2}; f_{34}\right\}}\right) = 1-\alpha\,. \tag{1.85}$$

Розділ 2
ЗАСТОСУВАННЯ ДИСПЕРСІЙНОЇ АНАЛІЗИ В ХЕМІЧНІЙ ТЕХНОЛОГІЇ

Приклад з хімічного матеріалознавства:

Виявлення впливу величини навантаги, швидкости ковзання, типу полімеру та типу суміжної поверхні на тертя та зношування полімерів за допомогою дисперсійного аналізу .

2.1. Дослідження значимости ряду факторів при зношуванні

Для дослідження вибрані два кількісних фактора, які варіюються на чотирьох кількісних рівнях (табл. 2.1) і два якісних фактора, які варіюються на чотирьох якісних рівнях (табл. 2.2)

Таблиця 2.1

Кількісні фактори

№ п/п	Кількісні фактори	Натуральне позначення		Рівні варіювання				Інтервал варіювання
		Факт.	Рівн.	1	2	3	4	
1	Питоме навантаження, МПа	P	P_i	1,0	2,0	3,0	4,0	1,0
2	Швидкість ковзання м/с	V	V_i	0,3	0,6	0,9	1,2	0,3

Таблиця 2.2

Якісні фактори

№ п/п	Якісні фактори	Натуральне позначення		Рівні варіювання: q, l			
		Факт.	Рівн.	1	2	3	4
1	Природа полімера	П	$П_q$	A	B	C	Д
2	Природа контртіла	Me	Me_l	α	β	γ	δ

У табл. 2.2 внесені такі позначення: A- аліфатичний поліамід П-610; В-ароматичний поліамід фенілон С2; С- ароматичний поліамід фенілон П; Д –

поліпропілен; α- титановий стоп ВТ 1-0; β- титановий стоп ПТ-3В; γ- нержавіюча сталь 10Х18Н9Т; δ- алюміній А-5.

В якості матриці планування використані сумісний план типу $N=p^к=p^2=m^2$ з квадратами 2-го порядку, які являють собою сумісні два квадрата розміром $m\times m$ (де N-число дослідів, p- число рівнів фактичного експерименту, к- число факторів, m- число стовпців і рядків квадрату). В цьому випадку модель експерименту, нехтуючи ефектами взаємодії, які з великою ймовірністю є незначимими, представляється у вигляді:

$$\eta_{ijql}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_q+\delta_l+\varepsilon_{ijql}, \qquad (2.1)$$

де η_{ijql}- значення функції відгуку для i-го рівня фактора P, j-го рівня фактора v, q-го рівня фактора П, l-го рівня фактора Ме деякої гіпотетичної ґенеральної сукупності;

μ- загальний ефект;

α_i- ефект від i-го рівня P- фактора;

β_j- ефект від j-го рівня v-фактора;

γ_q- ефект від к-го рівня П- фактора;

δ_l- ефект від l-го рівня Ме-фактора;

ε_{ijql}- помилка гіпотетичного експерименту.

Оцінка ґенеральних ефектів за вибірковими характеристиками становить:

$\eta_{ijql} \leftarrow y_{ijql}$; $\mu \leftarrow M$; $\alpha_i \leftarrow P_i$; $\beta_j \leftarrow v_j$; $\gamma_q \leftarrow П_q$; $\delta_l \leftarrow Me_l$.

$\varepsilon_{ijql} \leftarrow \varepsilon_{пом}=\varepsilon_n$- помилка експеримента.

Тоді модель експерименту можна представити у вигляді:

$$Y_{ijql}=M+P_i+v_j+П_q+Me_l+\varepsilon_{пом}. \qquad (2.2)$$

Число взаємноортогональних квадратів дорівнює n+1=4+1=5, на яких 2 впорядкованих (по рядках і стовпцях) і 3 латинських:

1-й	2-й	3-й	4-й	5-й
1 1 1 1	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
2 2 2 2	1 2 3 4	2 1 4 3	3 4 1 2	4 3 2 1
3 3 3 3	1 2 3 4	3 4 1 2	4 3 2 1	2 1 4 3
4 4 4 4	1 2 3 4	4 3 2 1	2 1 4 3	3 4 1 2

Накладанням 3-го і 4-го взаємноортогональних квадратів один на одного одержали оптимальний план у вигляді греко-латинського квадрата (умови ортогонального планування):

Матриця планування в цифровому позначенні	Матриця планування в буквенному позначенні
11 22 33 44	Aα Bβ Cj Dδ
23 14 41 32	Bj Aδ Dα Cβ
34 43 12 21	Cδ Dj Aβ Bα
42 31 24 13	Dβ Cα Bδ Aj

Шляхом заміни в другому рядку оптимального плану поєднання елементів 14 на 34 і 32 на 12. а в четвертому рядку- 31 на 11 і 13 на 33 (використовуючи правило перестановок) одержали неоптимальний палн квадрата 2-го порядку (умови неоптимального планування):

Матриця планування в цифровому позначенні	Матриця планування в буквенному позначенні
11 22 33 44	Aα Bβ Cγ Dδ
23 34 41 12	Bγ Cδ Dα Aβ
34 43 12 21	Cδ Dγ Aβ Bα
43 11 24 33	Dβ Aα Bδ Cγ

Таким чином, вся інформація одержується з 16+ 4= 20 дослідів.

2.2. Реалізація оптимального плану

Робоча матриця і матриця планування греко-латинського квадрату суміщені з факторним планом n^2 показані в таблицях 2.3, 2.4.

Таблиця 2.3

Матриця планування(оптимальний план)

Vi	Pi			
	P_1	P_2	P_3	P_4
V_1	Aα	Bβ	Cγ	Дδ
V_2	Bγ	Aδ	Дα	Cβ
V_3	Cδ	Дγ	Aβ	Bα
V_4	Дβ	Cα	Bδ	Aγ

Таблиця 2.4

Робоча матриця (оптимальний план)

Vм/с	P,МПа			
	1,0	2,0	3,0	4,0
0,3	П-68/ ВТ 1-0	Ф-С-2/ПТ-3В	ФП/10Х18Н9Т	ПП/Al
0,6	ФС-2/10Х18Н9Т	П-68/ Al	ПП/ ВТ 1-0	ФП/ ПТ-3В
0,9	ФП/ Al	ПП/10Х18Н9Т	П-68/ ПТ-3В	ФС-2/ ВТ 1-0
1,2	ПП/ ПТ-3В	ФП/ ВТ 1-0	ФС-2/ Al	П-68/10Х18Н9Т

А) Знос (I,$\cdot 10^{-8}$)

Результати раалізації робочої матриці (оптимальний план) представлені в табл. 2.5 і 2.6.

1) Загальна сума квадратів:

$$SS_{заг} = \sum_{i=1}^{m_i}\sum_{j=1}^{m_i}\sum_{n=1}^{m_n}\left(y_{ijn}^2\right) - \frac{\left(\sum_{i=1}^{m_i}\sum_{j=1}^{m_j}\sum_{n=1}^{m_n} y_{ijn}\right)^2}{N \cdot n}; \qquad (2.3)$$

$SS_{заг}$= 393901, 89- 39251, 53= 354650, 36.

Число ступенів свободи

$F_{заг}$= 64- 1= 63.

Таблиця 2.5

Результати досліджень лінійної інтенсивности зношування (I, $\cdot 10^{-8}$) за оптимальним планом

Vм/с	Р ,МПа			
	1,0	2,0	3,0	4,0
0,3	1,9 1,9 3,6 2,65	6,97 7,46 4,76 4,56	4,86 4,3 3,3 4,9	290,0 273,0 312,0 367,0
0,6	1,06 0,74 1,06 0,70	6,1 8,0 6,23 6,18	10,1 10,9 6,1 5,5	14,1 17,8 15,0 11,6
0,9	2,06 1,50 1,43 1,30	1,93 1,93 1,03 1,38	13,0 7,4 10,0 8,3	15,0 14,0 10,1 11,7
1,2	1,3 1,8 1,2 0,67	8,0 10,1 12,4 13,9	2,5 2,9 1,8 2,3	3,6 1,7 2,8 1,3

Загальна дисперсія:

$$S^2_{заг} = \frac{SS_{заг}}{f_{заг}}; \qquad (2.4)$$

$S^2_{заг}$= 5629, 37.

2) Сума квадратів відхилень середньої за швидкістю ковзання від загальної середньої:

$$SS_v = \frac{\sum_{j=1}^{m_j}\left(\sum_{i=1}^{m_i}\sum_{n=1}^{m_n} y_{ijn}\right)^2}{m_i \cdot m_n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{m_i}\sum_{j=1}^{m_j}\sum_{n=1}^{m_n} y_{ijn}\right)^2}{N \cdot n}; \qquad (2.5)$$

SS_v= 106376, 4- 39251, 5= 67124, 9.

Число ступенів свободи

f_v= 4- 1= 3.

Таблиця 2.6

Результати досліджень лінійної інтенсивности зношування за оптимальним планом (середні значення)

V,м/с	P,МПа			
	1,0	2,0	3,0	4,0
0,3	2,51	5,94	4,34	310,5
0,6	0,89	6,63	8,15	14,63
0,9	1,57	1,57	9,68	12,7
1,2	1,24	11,1	2,38	2,4

Дисперсія по швидкости ковзання:

$$S_v^2 = \frac{SS_v}{f_v}; \tag{2.6}$$

S^2_v= 22375.

3) Сума квадратів відхилень середньої за питомим навантаженням від загальної середньої:

$$SS_p = \frac{\sum_{i=1}^{m_i}\left(\sum_{j=1}^{m_j}\sum_{n=1}^{m_n} y_{ijn}\right)^2}{m_i \cdot m_n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{m_i}\sum_{j=1}^{m_j}\sum_{n=1}^{m_n} y_{ijn}\right)^2}{N \cdot n}; \tag{2.7}$$

SS_p= 116996, 6- 39251, 5= 77745, 1.

Число ступенів свободи

f_p= 4- 1= 3.

Дисперсія по питомому навантаженню:

$$S_p^2 = \frac{SS_p}{f_p}; \tag{2.8}$$

S^2_p= 25915, 03.

4) Сума квадратів відхилень середньої за природою полімера від загальної середньої:

$$SS_n = \frac{\sum_{q=1}^{m_q}\left(\sum_{i,j=1}^{m_{ij}}\sum_{n=1}^{m_n} y_{ijn}\right)^2}{m_{ij} \cdot m_n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{m_i}\sum_{j=1}^{m_j}\sum_{n=1}^{m_n} y_{ijn}\right)^2}{N \cdot n}; \tag{2.9}$$

SS_n= 104015, 1- 39251, 5= 64763, 6.

Число ступенів свободи

$f_n = 4 - 1 = 3.$

Дисперсія по природі полімера:

$$S_n^2 = \frac{SS_n}{f_n}; \qquad (2.10)$$

$S^2_n = 21587,9.$

5) Сума квадратів відхилень середньої за природою металу від загальної середньої:

$$SS_{Me} = \frac{\sum_{l=1}^{m_l}\left(\sum_{i,j=1}^{m_{ji}}\sum_{n=1}^{m_n} y_{ijn}\right)^2}{m_i \cdot m_n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{m_i}\sum_{j=1}^{m_j}\sum_{n=1}^{m_n} y_{ijn}\right)^2}{N \cdot n}; \qquad (2.11)$$

$SS_{Me} = 105351,5 - 39251,5 = 66100.$

Число ступенів свободи

$f_{Me} = 4 - 1 = 3.$

Дисперсія по природі контртіла:

$$S_{Me}^2 = \frac{SS_{Me}}{f_{Me}}; \qquad (2.12)$$

$S^2_{Me} = 22033,3.$

6) Сума квадратів помилки:

$SS_{пом} = SS_{заг} - (SS_v + SS_p + SS_n + SS_{Me}) = 354650,36 - (67124,9 +$

$+ 77745,1 + 64763,6 + 66100) = 78916,76.$ (2.13)

Число ступенів свободи:

$f_{пом} = f_{заг} - (f_v + f_p + f_n + f_{Me}) = 63 - 12 = 51.$ (2.14)

Дисперсія помилки:

$$S_{пом}^2 = \frac{SS_{пом}}{f_{пом}}; \qquad (2.15)$$

$S^2_{пом} = 1547,39.$

Результати дисперсійного аналізу зведені в табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Результати дисперсійного аналізу лінійної інтенсивности зношування

№	Джерело мінливости	f	Сума квадратів	Середній квадрат
1	Ефект швидкости ковзання	3	$67124{,}9.\ 10^{-16}$	$22375{,}0.\ 10^{-16}$
2	Ефект питомого навантаження	3	$77745{,}1.\ 10^{-16}$	$25915{,}03.\ 10^{-16}$
3	Ефект контртіла (металу)	3	$66100{,}0.\ 10^{-16}$	$22033{,}3.\ 10^{-16}$
4	Ефект полімеру	3	$64763{,}6.\ 10^{-16}$	$21587{,}9.\ 10^{-16}$
5	Помилка	51	$78916{,}76.\ 10^{-16}$	$1547{,}39.\ 10^{-16}$
6	Сума	63	$354650{,}36.\ 10^{-16}$	

7) Перевірка нуль- гіпотез про значимість факторів за критерієм Фішера.

а) Но: β_j= 0 для всіх j (вплив швидкости ковзання на знос незначний).

$F_{розр}= S^2_v/S^2_{пом}= 14,46$;

$F_{табл}= 2,789$ (для р= 0, 95, $f_v= 3$, $f_{пом}= 51$);

$F_{розр}> F_{табл}$.

Висновок: вплив швидкости ковзання на знос значний із ймовірністю 0, 95 в області факторного простору від 0, 3 до 1, 2 м/с.

б) Но: α_i= 0 для всіх i (вплив питомого навантаження на знос незначний).

$F_{розр}= 16,75$;

$F_{табл}= 2,789$ (для р= 0, 95, $f_p= 3$, $f_{пом}= 51$);

$F_{розр}> F_{табл}$.

Висновок: вплив питомого навантаження на знос значний із ймовірністю 0, 95 в області факторного простору від 1 до 4 МПа..

в) Но: δ_l= 0 для всіх l (вплив природи контртіла на знос незначний).

$F_{розр}= 14,24$;

$F_{табл}= 2,789$ (для р= 0, 95, $f_{Me}= 3$, $f_{пом}= 51$);

$F_{розр}> F_{табл}$.

Висновок: вплив природи контртіла на знос значний із ймовірністю 0, 95 для алюмінію, нержавіючої сталі, титанових стопів.

г) Но: γ_q= 0 для всіх q (вплив природи полімеру на знос незначний).

$F_{розр}= 13, 95$;

$F_{табл}= 2, 789$ (для $p= 0, 95$, $f_п= 3$, $f_{пом}= 51$);

$F_{розр}> F_{табл}$.

Висновок: вплив природи полімеру на знос значний із ймовірністю 0, 95 для ароматичних і аліфатичного поліамідів і поліпропілену.

8) Перевірка нуль- гіпотез про рівний вплив факторів:

а) Но: $SS_p= SS_v$; $F_{розр}= S^2_p/S^2_v=1, 16$; $F_{табл}= 9, 28$ (для $p= 0, 95$, $f_p= 3$, $f_v= 3$);

$F_{розр}< F_т$

Гіпотеза Но підтверджується.

б) Но: $SS_p= SS_n$; $F_{розр}= 1, 2$; $F_{табл}= 9, 28$ (для $p= 0, 95$, $f_p= 3$, $f_n= 3$);

$F_{розр}< F_т$

Гіпотеза Но підтверджується.

в) Но: $SS_p= SS_{Me}$; $F_{розр}= 1, 18$; $F_{табл}= 9, 28$ (для $p= 0, 95$, $f_p= 3$, $f_{Me}= 3$);

$F_{розр}< F_{табл}$

Гіпотеза Но підтверджується.

г) Но: $SS_v= SS_n$; $F_{розр}= 1, 04$; $F_{табл}= 9, 28$ (для $p= 0, 95$, $f_v= 3$, $f_n= 3$);

$F_{розр}< F$

Гіпотеза Но підтверджується

д) Но: $SS_v= SS_{Me}$; $F_{розр}= 1, 02$; $F_{табл}= 9, 28$ (для $p= 0, 95$, $f_v= 3$, $f_{Me}= 3$);

$F_{розр}< F_т$

Гіпотеза Но підтверджується.

е) Но: $SS_n= SS_{Me}$; $F_{розр}= 0, 98$; $F_{табл}= 9, 28$ (для $p= 0, 95$, $f_n= 3$, $f_{Me}= 3$);

$F_{розр}< F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

Висновок: ефекти від всіх факторів в однаковій мірі впливають на знос із ймовірністю 0, 95.

Б) Коефіцієнт тертя.

Результати раалізації робочої матриці за коефіцієнтом тертя (оптимальний план) представлені в табл. 2.8 і 2.9.

1) Загальна сума квадратів:

$$SS_{заг}= 5,669- 4, 634= 1, 035.$$

Число ступенів свободи:

$$f_{заг}= 80- 1= 79.$$

Загальна дисперсія:

$$S^2_{заг}= 0, 013.$$

Таблиця 2.8

Результати досліджень коефіцієнту тертя за оптимальним планом

V м/с	Р,МПа			
	1,0	2,0	3,0	4,0
0,3	0,595 0,560 0,562 0,525 0,537	0,367 0,314 0,340 0,303 0,360	0,298 0,220 0,199 0,229 0,287	0,369 0,368 0,368 0,357 0,383
0,6	0,296 0,286 0,243 0,229 0,327	0,218 0,207 0,242 0,217 0,243	0,225 0,212 0,199 0,203 0,193	0,240 0,220 0,220 0,220 0,198
0,9	0,210 0,243 0,273 0,228 0,252	0,150 0,132 0,124 0,129 0,132	0,270 0,292 0,364 0,344 0,353	0,216 0,179 0,161 0,179 0,165
1,2	0,132 0,113 0,143 0,115 0,121	0,171 0,228 0,221 0,226 0,196	0,148 0,120 0,115 0,123 0,150	0,093 0,043 0,094 0,066 0,056

Таблиця 2.9

Результати досліджень коефіцієнту тертя за оптимальним планом

(середні значення)

V,м/с	Р,МПа			
	1,0	2,0	3,0	4,0
0,3	0,56	0,34	0,25	0,37
0,6	0,28	0,23	0,21	0,22
0,9	0,24	0,13	0,32	0,18
1,2	0,12	0,21	0,13	0,07

2) Сума квадратів відхилень середньої за швидкістю ковзання від загальної середньої:

$$SS_v = 5,2455 - 4,634 = 0,6115.$$

Число ступенів свободи:

$$f_v = 4 - 1 = 3.$$

Дисперсія по швидкости ковзання:

$$S^2_v = 0,2038.$$

3) Сума квадратів відхилень середньої за питомим навантаженням від загальної середньої:

$$SS_p = 4,73 - 4,634 = 0,096.$$

Число ступенів свободи:

$$f_p = 4 - 1 = 3.$$

Дисперсія по питомому навантаженню:

$$S^2_p = 0,032.$$

4) Сума квадратів відхилень середньої за природою полімера від загальної середньої:

$$SS_n = 4,716 - 4,634 = 0,082.$$

Число ступенів свободи:

$$f_n = 4 - 1 = 3.$$

Дисперсія по природі полімера:

$$S^2_n = 0,027.$$

5) Сума квадратів відхилень середньої за природою металу від загальної середньої:

$$SS_{Me} = 4,751 - 4,634 = 0,117.$$

Число ступенів свободи:

$$f_{Me} = 4 - 1 = 3.$$

Дисперсія по природі контртіла:

$$S^2_{Me} = 0,039.$$

6) Сума квадратів помилки:

$$SS_{пом} = SS_{заг} - (SS_v + SS_p + SS_n + SS_{Me}) = 1,035 - (0,611 +$$

$+ 0, 096+ 0, 082+ 0, 117)= 0, 129.$

Число ступенів свободи:

$$f_{пом}= f_{заг}- (f_{v}+ f_{p}+ f_{n}+ f_{Me})= 79- 12= 67.$$

Дисперсія помилки:

$$S^{2}_{пом}= 0, 002.$$

Результати дисперсійного аналізу зведені в табл. 2.10.

Таблиця 2.10

Результати дисперсійного аналізу по коефіцієнту тертя

(оптимальний план)

№	Джерело мінливости	F	Сума квадратів	Середній квадрат
1	Ефект швидкости ковзання	3	0,611	0,2038
2	Ефект питомого навантаження	3	0,096	0,032
3	Ефект контртіла (металу)	3	0,117	0,039
4	Ефект полімеру	3	0,082	0,027
5	Помилка	67	0,129	0,002
6	Сума	79	1,035	

7) Перевірка нуль- гіпотез про значимість факторів за критерієм Фішера.

а) Но: $\beta_{j}= 0$ для всіх j (вплив швидкости ковзання на коефіцієнт тертя незначний).

$F_{розр}= 101, 9;$

$F_{табл}= 2, 75$ (для $p= 0, 95$, $f_{v}= 3$, $f_{пом}= 67$);

$F_{розр}> F_{табл}$.

Висновок: вплив швидкости ковзання на коефіцієнт тертя значний із ймовірністю 0, 95 в області факторного простору від 0, 3 до 1, 2 м/с.

б) Но: $\alpha_{i}= 0$ для всіх i (вплив питомого навантаження на коефіцієнт тертя незначний).

$F_{розр}= 16;$

$F_{табл}= 2, 75$ (для $p= 0, 95$, $f_{p}= 3$, $f_{пом}= 67$);

$F_{розр}> F_{табл}$.

Висновок: вплив питомого навантаження на коефіцієнт тертя значний із ймовірністю 0, 95 в області факторного простору від 1 до 4 МПа.

в) Но: δ_l= 0 для всіх l (вплив природи контртіла на коефіцієнт тертя незначний).

$F_{розр}$= 19, 5;

$F_{табл}$= 2, 75 (для p= 0, 95, f_l= 3, $f_{пом}$= 67);

$F_{розр}$> $F_{табл}$.

Висновок: вплив природи контртіла на коефіцієн тертя значний із ймовірністю 0, 95 для алюмінію, нержавіючої сталі, титанових стопів.

г) Но: γ_q= 0 для всіх q (вплив природи полімеру на коефіцієнт тертя незначний).

$F_{розр}$= 13, 5;

$F_{табл}$= 2, 75 (для p= 0, 95, f_q= 3, $f_{пом}$= 67);

$F_{розр}$> $F_{табл}$.

Висновок: вплив природи полімеру на коефіцієнт тертя значний із ймовірністю 0, 95 для ароматичних і аліфатичного поліамідів і поліпропілену.

8) Перевірка нуль- гіпотез про рівний вплив факторів:

а) Но: SS_p= SS_v; $F_{розр}$= 6, 37; $F_{табл}$= 9, 28 (для p= 0, 95, f_p= 3, f_v= 3);

$F_{розр}$< $F_т$

Гіпотеза Но підтверджується

б) Но: SS_p= $SS_п$; $F_{розр}$= 1, 19; $F_{табл}$= 9, 28 (для p= 0, 95, f_p= 3, $f_п$= 3);

$F_{розр}$< $F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

в) Но: SS_p= SS_{Me}; $F_{розр}$= 1, 22; $F_{табл}$= 9, 28 (для p= 0, 95, f_p= 3, f_{Me}= 3);

$F_{розр}$< $F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

г) Но: SS_v= SS_{Me}; $F_{розр}$= 5, 23; $F_{табл}$= 9, 28 (для p= 0, 95, f_v= 3, f_{Me}= 3);

$F_{розр}$< $F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

д) Ho: $SS_v = SS_n$; $F_{розр} = 7,55$; $F_{табл} = 9,28$ (для p= 0, 95, $f_v = 3$, $f_n = 3$);

$F_{розр} < F_{табл}$.

Гіпотеза Ho підтверджується.

е) Ho: $SS_n = SS_{Me}$; $F_{розр} = 1,44$; $F_{табл} = 9,28$ (для p= 0, 95, $f_n = 3$, $f_{Me} = 3$);

$F_{розр} < F_{табл}$.

Гіпотеза Ho підтверджується.

Висновок: ефекти від всіх факторів в однаковій мірі впливають на коеефіцієнт тертя з ймовірністю 0, 95.

2.3. Реалізація неоптимального плану

Робоча матриця і матриця планування греко-латинського квадрату , суміщені з факторним планом n^2 наведені в табл. 2.11 і 2.12.

Таблиця 2.11

Робоча матриця (неоптимальний план)

V,м/с	P, МПа			
	1,0	2,0	3,0	4,0
0,3	П-68/ВТ-1	ФС-2/3В	ФП/10Х18Н9Т	ПП/Al
0,6	ФС-2/10Х18Н9Т	ФП/Al	ПП/ВТ-1	П-68/3В
0.9	ФП/Al	ПП/10Х18Н9Т	П-68/3В	ФС-2/ВТ-1
1,2	ПП/3В	П-68/ВТ-1	ФС-2/Al	ФП/10Х18Н9Т

Таблиця 2.12

Матриця планування (неоптимальний план)

V_j	P_i			
	P_1	P_2	P_3	P_4
V_1	$A\alpha$	$B\beta$	$C\gamma$	$D\delta$
V_2	$B\gamma$	$C\delta$	$D\alpha$	$A\beta$
V_3	$C\delta$	$D\gamma$	$A\beta$	$B\alpha$
V_4	$D\beta$	$A\alpha$	$B\delta$	$C\gamma$

Результати реалізації робочої матриці (неоптимальний план) представлені в табл. 2.13 і 2.14.

А) Знос (I, ·10^{-8})

1) Загальна сума квадратів:

$SS_{заг}$= 393040, 9- 37233, 56= 355807, 34.

Число ступенів свободи:

$f_{заг}$= 64- 1= 63.

Загальна дисперсія:

$S^2_{заг}$= 5647, 74.

Таблиця 2.13

Результати досліджень лінійної інтенсивности зношування (I, ·10^{-8}) за неоптимальним планом

V,м/с	Р,МПа			
	1,0	2,0	3,0	4,0
0,3	1,90 1,90 3,60 2,65	6,97 7,46 4,76 4,56	4,86 4,30 3,30 4,90	290,0 273,0 312,0 367,0
0,6	1,06 0,74 1,06 0,70	2,80 5,90 3,97 5,86	10,1 10,9 6,1 5,5	5,2 6,50 3,90 5,30
0,9	2,06 1,50 1,30 1,43	1,93 1,93 1,03 1,38	13,0 7,40 10,0 8,30	15,0 14,0 10,1 11,7
1,2	1,3 1,8 1,2 0,67	7,0 5,30 7,80 4,70	2,50 2,90 1,80 2,30	9,60 8,90 8,20 6,90

Таблиця 2.14

Результати досліджень лінійної інтенсивности зношування за неоптимальним планом (середні значення)

V,м/с	Р,МПа			
	1,0	2,0	3,0	4,0
0,3	2,51	5,94	4,34	310,5
0,6	0,89	4,63	8,15	5,23
0,9	1,57	1,57	9,68	12,7
1,2	1,24	6,20	2,38	8,4

2) Сума квадратів відхилень середньої за швидкістю ковзання від загальної середньої:

$$SS_v = 105856,43 - 37233,56 = 68622,87.$$

Число ступенів свободи:

$$f_v = 4 - 1 = 3.$$

Дисперсія по швидкости ковзання:

$$S^2_v = 22874,29.$$

3) Сума квадратів відхилень середньої за питомим навантаженням від загальної середньої:

$$SS_p = 114428,21 - 37233,56 = 77194,65.$$

Число ступенів свободи:

$$f_p = 4 - 1 = 3.$$

Дисперсія по питомому навантаженню:

$$S^2_p = 25731,55.$$

4) Сума квадратів відхилень середньої за природою полімера від загальної середньої:

$$SS_n = 107722,98 - 37233,56 = 70489,42.$$

Число ступенів свободи:

$$f_n = 4 - 1 = 3.$$

Дисперсія по природі полімера:

$$S^2_n = 23496,47.$$

5) Сума квадратів відхилень середньої за природою металу від загальної середньої:

$$SS_{Me} = 103404,48 - 37233,56 = 66170,92.$$

Число ступенів свободи:

$$f_{Me} = 4 - 1 = 3.$$

Дисперсія по природі контртіла:

$$S^2_{Me} = 22056,97.$$

6) Сума квадратів помилки:

$$SS_{пом} = SS_{заг} - (SS_v + SS_p + SS_n + SS_{Me}) = 355807,34 - (68622,87 +$$

+ 77194, 65+ 70489, 42+ 66170, 92)= 73329, 48.

Число ступенів свободи:

$$f_{пом}= f_{заг}- (f_v+ f_p+ f_n+ f_{Me})= 63- 12= 51.$$

Дисперсія помилки:

$$S^2_{пом}= 1437, 83.$$

Результати дисперсійного аналізу зведені в табл. 2.15.

Таблиця 2.15

Результати дисперсійного аналізу лінійної інтенсивности зношування

№ п/п	Джерело мінливости	F	Сума квадратів	Середній квадрат
1	Ефект швидкости ковзання	3	$68622{,}87.10^{-16}$	$22874{,}29.10^{-16}$
2	Ефект питомого навантаження	3	$77194{,}65.10^{-16}$	$25731{,}55.10^{-16}$
3	Ефект контртіла (металу)	3	$66170{,}92.10^{-16}$	$22056{,}97.10^{-16}$
4	Ефект полімера	3	$70489{,}42.10^{-16}$	$23496{,}47.10^{-16}$
5	Помилка	51	$73329{,}48.10^{-16}$	$1437{,}83.10^{-16}$
6	Сума	63	$355807{,}34.10^{-16}$	

7) Перевірка нуль- гіпотез про значимість факторів за критерієм Фішера.

а) Но: $\beta_j= 0$ для всіх j (вплив швидкости ковзання на знос незначний).

$F_{розр}= 15{,}909$;

$F_{табл}= 2, 789$ (для p= 0, 95, $f_v= 3$, $f_{пом}= 51$);

$F_{розр}> F_{табл}$.

Висновок: вплив швидкости ковзання на знос значний із ймовірністю 0,95 в області факторного простору від 0, 3 до 1, 2 м/с.

б) Но: $\alpha_i= 0$ для всіх i (вплив питомого навантаження на знос незначний).

$F_{розр}= 17, 9$;

$F_{табл}= 2, 789$ (для p= 0, 95, $f_p= 3$, $f_{пом}= 51$);

$F_{розр}> F_{табл}$.

Висновок: вплив питомого навантаження на знос значний із ймовірністю 0, 95 в області факторного простору від 1 до 4 МПа.

в) Но: δ_l= 0 для всіх l (вплив природи контртіла на знос незначний).

$F_{розр}$= 15, 3;

$F_{табл}$= 2, 789 (для p= 0, 95, f_l= 3, $f_{пом}$= 51);

$F_{розр}$> $F_{табл}$.

Висновок: вплив природи контртіла на знос значний із ймовірністю 0, 95 для алюмінію, нержавіючої сталі, титанових стопів.

г) Но: γ_q= 0 для всіх q (вплив природи полімеру на знос незначний).

$F_{розр}$= 16, 34;

$F_{табл}$= 2, 789 (для p= 0, 95, f_q= 3, $f_{пом}$= 51);

$F_{розр}$> $F_{табл}$.

Висновок: вплив природи полімеру на знос значний із ймовірністю 0, 95 для ароматичних і аліфатичного поліамідів і поліпропілену.

8) Перевірка нуль- гіпотез про рівний вплив факторів:

а) Но: SS_p= SS_v; $F_{розр}$= 1, 125; $F_{табл}$= 9, 28 (для p= 0, 95, f_p= 3, f_v= 3);

$F_{розр}$< $F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

б) Но: SS_p= SS_{Me}; $F_{розр}$= 1, 167; $F_{табл}$= 9, 28 (для p= 0, 95, f_p= 3, f_{Me}= 3);

$F_{розр}$< $F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

в) Но: SS_p= SS_n; $F_{розр}$= 1, 095; $F_{табл}$= 9, 28 (для p= 0, 95, f_p= 3, f_n= 3);

$F_{розр}$< $F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

г) Но: SS_v= SS_{Me}; $F_{розр}$= 1, 037; $F_{табл}$= 9, 28 (для p= 0, 95, f_v= 3, f_{Me}= 3);

$F_{розр}$< $F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

д) Но: SS_v= SS_n; $F_{розр}$= 1, 027; $F_{табл}$= 9, 28 (для p= 0, 95, f_v= 3, f_n= 3);

$F_{розр}$< $F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

е) Но: $SS_n = SS_{Me}$; $F_{розр} = 1,065$; $F_{табл} = 9,28$ (для р= 0, 95, $f_n = 3$, $f_{Me} = 3$);

$F_{розр} < F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

Висновок: ефекти від всіх факторів в однаковій мірі впливають на знос із ймовірністю 0, 95.

Б) Коефіцієнт тертя

Результати реалізації робочої матриці за коефіцієнтом тертя (неоптимальний план) представлені в табл. 2.16 і 2.17.

Таблиця 2.16

Результати досліджень коефіцієнту тертя за неоптимальним планом

V,м/с	Р,МПа			
	1,0	2,0	3,0	4,0
0,3	0,595 0,560 0,562 0,525 0,537	0,367 0,314 0,340 0,303 0,360	0,298 0,220 0,199 0,229 0,287	0,369 0,368 0,368 0,357 0,383
0,6	0,296 0,286 0,243 0,229 0,327	0,251 0,263 0,268 0,280 0,274	0,225 0,212 0,199 0,203 0,193	0,308 0,277 0,260 0,265 0,232
0,9	0,210 0,243 0,273 0,228 0,252	0,150 0,132 0,124 0,129 0,132	0,270 0,292 0,364 0,344 0,353	0,216 0,179 0,161 0,179 0,165
1,2	0,132 0,113 0,143 0,115 0,121	0,360 0,338 0,392 0,293 0,306	0,148 0,120 0,115 0,123 0,150	0,338 0,303 0,290 0,266 0,305

1) Загальна сума квадратів:

$$SS_{заг} = 6,7081 - 5,7808 = 0,9273.$$

Число ступенів свободи:

$$f_{заг} = 80 - 1 = 79.$$

Загальна дисперсія:

$$S^2_{заг}= 0,0117.$$

2) Сума квадратів відхилень середньої за швидкістю ковзання від загальної середньої:

$$SS_v= 6,1081- 5,7808= 0,32725.$$

Таблиця 2.17

Результати досліджень коефіцієнту тертя за неоптимальним планом (середні значення)

V, м/с	P, МПа			
	1,0	2,0	3,0	4,0
0,3	0,56	0,34	0,25	0,37
0,6	0,28	0,27	0,21	0,27
0,9	0,24	0,13	0,32	0,18
1,2	0,12	0,34	0,13	0,30

Число ступенів свободи:

$$f_v= 4- 1= 3.$$

Дисперсія по швидкости ковзання:

$$S^2_v= 0,109083.$$

3) Сума квадратів відхилень середньої за питомим навантаженням від загальної середньої:

$$SS_p= 5,8360- 5,7808= 0,0552.$$

Число ступенів свободи:

$$f_p= 4- 1= 3.$$

Дисперсія по питомому навантаженню:

$$S^2_p= 0,0184.$$

4) Сума квадратів відхилень середньої за природою полімера від загальної середньої:

$$SS_n= 6,094- 5,781= 0,313.$$

Число ступенів свободи:

$$f_n= 4- 1= 3.$$

Дисперсія по природі полімера:

S^2_n= 0, 104.

5) Сума квадратів відхилень середньої за природою металу від загальної середньої:

SS_{Me}= 5, 8575- 5, 7808= 0, 0767.

Число ступенів свободи:

f_{Me}= 4- 1= 3.

Дисперсія по природі контртіла:

S^2_{Me}= 0, 025567.

6) Сума квадратів помилки:

$SS_{пом}$= $SS_{заг}$- (SS_v+ SS_p+ SS_n+ SS_{Me})= 0, 9273- (0, 32725+ + 0, 0552+ 0, 0767+ 0, 312805)= 0, 155345.

Число ступенів свободи:

$f_{пом}$= $f_{заг}$- (f_v+ f_p+ f_n+ f_{Me})= 79- 12= 67.

Дисперсія помилки:

$S^2_{пом}$= 0, 002319.

Результати дисперсійного аналізу зведені в табл. 2.18.

Таблиця 2.18

Результати дисперсійного аналізу по коефіцієнту тертя

(неоптимальний план)

№ п/п	Джерело мінливости	F	Сума квадратів	Середній квадрат
1	Ефект швидкости ковзання	3	0,32725	0,109083
2	Ефект питомого навантаження	3	0,0552	0,0184
3	Ефект контртіла (металу)	3	0,0767	0,025567
4	Ефект полімера	3	0,312805	0,104268
5	Помилка	67	0,155345	0,002319
6	Сума	79	0,9273	

7) Перевірка нуль- гіпотез про значимість факторів за критерієм Фішера.

а) Но: β_j= 0 для всіх j (вплив швидкости ковзання на знос незначний).

$F_{розр}$= 47, 04;

$F_{табл}$= 2, 746 (для р= 0, 95, f_j= 3, $f_{пом}$= 67);

$F_{розр}$> $F_{табл}$.

Висновок: вплив швидкости ковзання на знос значний із ймовірністю 0, 95 в області факторного простору від 0, 3 до 1, 2 м/с.

б) Но: α_i= 0 для всіх і (вплив питомого навантаження на знос незначний).

$F_{розр}$= 7, 93;

$F_{табл}$= 2, 746 (для р= 0, 95, f_i= 3, $f_{пом}$= 67);

$F_{розр}$> $F_{табл}$.

Висновок: вплив питомого навантаження на знос значний із ймовірністю 0, 95 в області факторного простору від 1 до 4 МПа.

в) Но: δ_l= 0 для всіх l (вплив природи контртіла на знос незначний).

$F_{розр}$= 11, 025;

$F_{табл}$= 2, 746 (для р= 0, 95, f_l= 3, $f_{пом}$= 67);

$F_{розр}$> $F_{табл}$.

Висновок: вплив природи контртіла на знос значний із ймовірністю 0, 95 для алюмінію, нержавіючої сталі, титанових стопів.

г) Но: γ_q= 0 для всіх q (вплив природи полімеру на знос незначний).

$F_{розр}$= 44, 96;

$F_{табл}$= 2, 746 (для р= 0, 95, f_q= 3, $f_{пом}$= 67);

$F_{розр}$> $F_{табл}$.

Висновок: вплив природи полімеру на знос значний із ймовірністю 0, 95 для ароматичних і аліфатичного поліамідів і поліпропілену.

8) Перевірка нуль- гіпотез про рівний вплив факторів:

а) Но: SS_p= SS_v; $F_{розр}$= 5, 928; $F_{табл}$= 9, 28 (для р= 0, 95, f_p= 3, f_v= 3);

Fрозр< **Fтабл.**

Гіпотеза Но підтверджується

б) Но: SS_p= SS_{Me}; $F_{розр}$ **= 1, 389; $F_{табл}$= 9, 28 (для р= 0, 95, f_p**= 3, f_{Me}= 3);

$F_{розр}$ < $F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

в) Но: $SS_p = SS_n$; $F_{розр} = 5,667$; $F_{табл} = 9,28$ (для р= 0, 95, $f_p = 3$, $f_n = 3$);

$F_{розр} < F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

г) Но: $SS_v = SS_{Me}$; $F_{розр} = 4,267$; $F_{табл} = 9,28$ (для р= 0, 95, $f_v = 3$, $f_{Me} = 3$);

$F_{розр} < F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

д) Но: $SS_v = SS_n$; $F_{розр} = 1,046$; $F_{табл} = 9,28$ (для р= 0, 95, $f_v = 3$, $f_n = 3$);

$F_{розр} < F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

е) Но: $SS_{Me} = SS_n$; $F_{розр} = 4,078$; $F_{табл} = 9,28$ (для р= 0, 95, $f_{Me} = 3$, $f_n = 3$);

$F_{розр} < F_{табл}$.

Гіпотеза Но підтверджується.

Висновок: ефекти від всіх факторів в однаковій мірі впливають на коефіцієнт тертя з ймовірністю 0, 95.

Співвідношення $F_{розр}/F_{табл}$ для оптимального і неоптимального плану по зносу і коефіцієнту тертя наведені в табл. 2.19, 2.20.

Таблиця 2.19

Співідношення $F_{розр}/F_{табл}$ за оптимальним і неоптимальним планами лінійної інтенсивности зношування

Фактор (умовне позначення)	Співідношення $F_{розр}/F_{табл}$ для оптимаьного плану	Співвідношення $F_{розр}/F_{табл}$ для неоптимального плану
V	14,5/ 2,8	15,9/ 2,8
P	16,8/ 2,8	17,9/ 2,8
N	14,2/ 2,8	15,3/ 2,8
Me	14,0/ 2,8	16,4/ 2,8
P/V	1,2/ 9,3	1,1/ 9,3
P/N	1,2/ 9,3	1,1/ 9,3
P/Me	1,2/ 9,3	1,2/ 9,3
V/N	1,0/ 9,3	1,0/ 9,3
V/Me	1,0/ 9,3	1,0/ 9,3
N/Me	1,0/ 9,3	1,1/ 9,3

Таблиця 2.20

Співідношення $F_{розр}/F_{табл}$ за оптимальниим і неоптимальним планами по коефіцієнту тертя

Фактор (умовне позначення)	Співвідношення $F_{розр}/F_{табл}$ для оптимального плану	Співвідношення $F_{розр}/F_{табл}$ для неоптимального плану
V	101,9/ 2,8	47,0/ 2,8
P	16,0/ 2,8	7,9/ 2,8
N	19,5/ 2,8	11,0/ 2,8
Me	13,5/ 2,8	45,0/ 2,8
P/V	6,4/ 9,3	5,9/ 9,3
P/N	1,2/ 9,3	5,7/ 9,3
P/Me	1,2/ 9,3	1,4/ 9,3
V/N	7,6/ 9,3	1,0/ 9,3
V/Me	5,2/ 9,3	4,3/ 9,3
N/Me	1,4/ 9,3	4,0/ 9,3

ВИСНОВКИ

1. Розроблені методика та методологія дисперсійної аналізи результатів експерименту в хемії та хемічній технології, а саме:

- статистичної рівности (нерівности) двох ґенеральних дисперсій;
- статистичної рівности (нерівности) двох ґенеральних середніх;
- статистичної рівности (нерівности) ряду ґенеральних дисперсій та ряду ґенеральних середніх в однофакторному експерименті;
- статистичної відмінности двох виборок за їх ознаками;
- статистичної значущости впливу факторів на результати двофакторного експерименту.

2. Розроблені методика та методологія обґрунтування нижніх і верхніх гарантованих толерантних меж за результатами експерименту для внесення даних в нормативні документи.

3. Ретельно розглянутий приклад застосування дисперсійної аналізи в хемічному матеріалознавстві для виявлення впливу параметрів тертя та зношування, природи полімерів та суміжної поверхні на коефіцієнт тертя та інтенсивність зношування.

Список використаних літературних джерел

1. Абезгауз Г.Г. Справочник по вероятностным расчетам. – М., 1970.
2. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. – М.: Металлургия, 1969.
3. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – 2-е изд., перераб. и допол. – М.: Наука, 1976. – 280 с.: ил., табл.–Библиогр. в конце гл.
4. Адлер Ю.П., Грановский Ю.В. Обзор прикладных работ по планированию эксперимента. – М.: Изд-во МГУ, 1967. – 96с.
5. Айала Ф., Кайгер Дж. Современная генетика: в 3-х томах/ Пер. с англ. А.Д. Базыкина. – Т.3. – М.: Мир, 1988. – 336с.
6. Айвазян А.С. Статистическое исследование зависимостей. – М.: Металлургия, 1966.
7. Активный эксперимент при рецептурно-технологическом моделировании/ В.А. Вознесенский, В.С. Калмуцкий, Л.А. Коган и др.// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.343-347.
8. Анализ структуры древесных ценозов/ А.И. Бузыкин, В.Л. Гавриков, О.П. Секретенко, Р.Г. Хлебопрос/ Под ред. Д.М. Киреева. – Новосибирск: Наука, 1985. – 95с.
9. Анисимов В.В., Лебедев Е.А. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели: Учеб. для вузов. – К.: Либідь, 1992. – 208с.
10. Ахназарова С.Л. Оптимизация эксперимента в химии и химической технологи / С.Л. Ахназарова, В.В. Кафаров. – М.: Высш. шк., 1978. – 320 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 302 – 303 (53 наимен.). – Приложения: с. 304 – 317 (14 табл.).
11. Балантер Б.И., Ханин М.А., Чернавский Д.С. Введение в математическое моделирование патологических процессов. – М., 1980.
12. Баранкевич М.М. Методи і моделі випадкових процесів. – Львів, 1986. – 71с.

13. Баталин Г.И. Сборник примеров и задач по физической химии: Учеб. пособие. Введение: с.7-39 (Обработка результатаов наблюдений…). – К.: Изд-во КДУ, 1960. – 548 с.: ил. 133 рис. – Табл.51. – Прилож.: с.471-539 (15 табл.). – Ответы: с.540-546.
14. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. – Л.: Химия, 1968. – 824с.
15. Бейли Н. Математика в биологии и медицине/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1970.
16. Бейли Н. Статистические методы в биологии / Норман Бейли; пер. с англ. В.П. Смилги; под ред., предисловии В.В. Налимова. – М.: Мир, 1963. – 272 с. Перевод за изд.: Statistical Methods in Biology by Norman T. J. Bailey, M.A., D.S.C. Reader in Biometry, University of Oxford. – The English Universities Press Ltd., 1959. – ил., табл. – Библиогр.: с. 7 (5 наим.), с. 222 (9 наим.). – Руковод. по применению статист. формул: с. 223 – 259. – Прилож.: с. 260 – 267 (5 табл.).
17. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980. – 336с.
18. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976.
19. Бендат Дж.С. Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А.Г. Пирсол; пер. с англ. Г.В.Матушевского, В.Е.Привальского; под ред. И.Н.Коваленко. – М.: Мир, 1971. – 408 с. – Перевод за изд.: Measurement and analysis of random data / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol. – John Wiley and Sons, Inc. – New York-London-Sydney, 1967.: ил., табл. – Предмет. указатель: с. 403-408. – Библиогр.: с. 400-402 (59 наименов.).
20. Березина Л.Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей / Л.Ю. Березина. – М.: Просвещение, 1979. – 144 с.: ил. – Упраж. после гл. – Ответы и указ.: с. 135 – 141. – Библиогр.: с. 132- 134 (73 назв.). – Упраж. после гл.
21. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа/ Под ред. И.Г. Арамановича. – М.: Физматиздат, 1963. – 664с.

22. Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г. Математико-статистические методы экспертных оценок. – М.: Статистика, 1974.
23. Биометрические аспекты изучения целостности организма/ Под ред. Б.С. Шорникова. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 152с.
24. Биометрический анализ в биологии = Biometrical analysis in biology: [собрание науч. работ / отв. ред. Г.Н. Зайцев]. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. – 160 с.: ил., табл. – Библиогр. в конце ст.
25. Биометрия/ Н.В. Глотов, Л.А. Животовский, Н.В. Хованов, Н.Н. Хромов-Борисов. – Л., 1982.
26. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1968.
27. Бондар А.Г., Статюха Г.А. Планирование эксперимента в химической технологии. – К.: Вища шк., 1976. – 220с.
28. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 431с.
29. Бородюк В.П. Проверка однородности статистических данных в регрессионном анализе// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С. 7-12.
30. Браунли К.А. Статистические исследования в производстве. – М.: Иностр. лит., 1949.
31. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента. – М.: Наука, 1976. – 225с.
32. Варковецкий М.М., Сазонов А.Л. Методы дисперсионного анализа в текстильных исследованиях. – М.: Легкая индустрия, 1977. – 136с.
33. Василевич В.И. Статистические методы в геоботанике. – Л.: Наука, 1969. – 232с.
34. Введение в методы байесовского статистического вывода/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 335с.
35. Веденепин Г.В. Общая методика экспериментальных исследований и обработка опытных данных. – М., 1973.

36. Венецкий И.Г. Теория вероятностей и математическая статистика / И.Г. Венецкий, Г.С. Кильдишев. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Статистика, 1975. – 264 с.: ил., табл. – Приложения: с. 255-264 (9 табл.).
37. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука.
38. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 480с.
39. Веселая Г.Н., Егорова Н.В. О математических моделях технологических процессов, полученных по данным пассивных наблюдений// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.24-28.
40. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник/ В.П. Дубовик, І.І.Юрик, І.П. Волкодав та ін./ За ред. В.П. Дубовика і І.І.Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480с.
41. Войтенко В.П. Виборчі технології у дзеркалі математики. – К.: Ін-т відкритої політики, 1999. – 13с.
42. Волков П.Н. Планирование эксперимента. – М.: МАДИ, 1972.
43. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник для самост. вивчення дисц. [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / А.Б. Волощенко, І.А. Джалладова; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 14 / 18.2-613 від 22.03.2002 р.]. – К.: Київ. Нац. економ. ун-т, 2003. – 256 с.: іл., табл. – Приклади розв. завдань і вправи для самост. розв’язання в кінці розд. – Блочно-модул. контроль: с. 183 – 203 (9 варіантів). – Відповіді: с. 204 – 216. - – Бібліогр.: с. 217 (18 назв). – Додатки: с. 218 – 254 (8 табл.). – ISBN 966 – 574 – 459– 3.
44. Воробьев Ф.П., Голобородько Н.К., Мануйлова А.М. Математическое планирование эксперимента в биохимии и медицине. – Х.: Вища шк., 1977. – 144с.
45. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев. – М.: Наука, 1971.
46. Гиляров А.М. Популяционная экология. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 192с.

47. Гирко В.Л. Спектральная теория случайных матриц. – М.: Наука, 1988. – 375с.
48. Гладышев Е.Г. О стохастической аппроксимации// Теория вероятностей и ее применение. - №2. – 1965.
49. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 447с.
50. Гнеденко Б.В. Математические методы в теории надежности. – М., 1965.
51. Горский В.Г., Адлер Ю.П. Планирование промышленных экспериментов (модели статики). – М.: Металлургия, 1974. – 264с.
52. Горский В.Г., Адлер Ю.П., Талалай А.М. Планирование промышленных экспериментов (модели динамики). – М.: Металлургия, 1974. – 112с.
53. Горский В.Г., Бродский В.З. О построении ротатабельных планов второго порядка на базе симплексов// Проблемы планирования эксперимента. – М: Наука, 1969. – С.79-88.
54. Грабарник П.Я., Комарова А.С. Статистический анализ горизонтальной структуры древостоя// Моделирование биогеоценотических процессов. – М.: Наука, 1967. – С.119-135.
55. Гришин В.К. Статистические методы анализа и планирования экспериментов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. – 128с.
56. Греблер Е.В., Генкин А.А. Применение непараметрических критериев статистики в медико-биологических исследованиях. – Л., 1973.
57. Далецкий Ю.Л., Белопольская Я.И. Стохастические управления и дифференциальная геометрия. – К.: Выща шк., 1989. – 295с.
58. Демьянов Ю.Э., Литвин Ф.Ф. Применение математических методов и ЭВМ в биологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 135с.
59. Деркач М.П. Курс варіаційної статистики. – К.: Вища школа, 1977. – 207с.
60. Дисперсия// БСЭ. – Т.8. - М.: Сов. энциклопедия, 1972. – 592с. – С. 306.
61. Дідух Я.П. Популяційна екологія. – К.: Фітосоціоцентр, 1998. – 192с.
62. Доерфель К. Статистика в аналитической химии. – М.: Мир, 1969.

63. Дорогов В.И., Чистяков В.П. Вероятные модели превращения частиц. – М.: Наука, 1988. – 110с.
64. Доспехов Б.А. Планирование полевого опыта и статистическая обработка его данных. – М., 1972.
65. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Статистика, 1973.
66. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648с.
67. Дэйвисон М. Многомерное шкалирование: Методы наглядного представления данных/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 254с.
68. Дэниел К. Применение статистики в промышленном эксперименте / Кутберт Дэниел; пер. с англ. под ред. Э.К. Лецкого. – М.: Мир, 1979. – 301 с. – Перевод за изд.: Applications of statistics to industrial experimentation / Cuthbert Daniel. – John Wiley and Sons. – New York-London-Sydney-Toronto, 1976.: ил., табл. – Библиогр.: с. 289 – 292 (92 наим.). – Предмет. указатель: с. 293 – 294. – Приложения в конце гл.
69. Егоров Н.С. Основы учения об антибиотиках. – М.: Высш. шк., 1986. – 448с.
70. Езекиэл М., Фокс К. Методы анализа корреляций и регрессий. – М.: Статистика, 1966. – 470с.
71. Жалдак М.И., Квитко А.Н. Теория вероятностей с элементами информатики: Практикум/ Под общ. ред. М.И. Ядренко. – К.: Вища шк., 1989. – 261с.
72. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник [для студ. економ. вищ. навч. заклад.]: У 2-х ч. – Ч. ІІ. Математична статистика / В.І. Жлуктенко, С.І Наконечний, С.С. Савіна; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 14 / 18.2-183 від 27.02.2001 р.]. – К.: Київ. нац. економ. ун-т, 2001. – 336 с.: іл., табл. – Теор. запит. та завдання до теми в кінці теми. – Лаб. роб. після тем 14,

15. – Додатки: с. 242 – 246, 292 – 331. – Бібліогр.: с. 246 (4 назви).– ISBN 966–574–265 – 5.

73. Жоров Ю.М. Моделирование физико-химических процессов нефтепереработки и нефтехимии. – М.: Химия, 1978. – 376с.
74. Журнал «Заводская лаборатория». Математические методы исследования. – М.: Металлургия, 1963-1985.
75. Завадский Ю.В. Математические таблицы для вероятностных расчетов. – М.: МАДИ, 1962.
76. Завадский Ю.В. Методика статистической обработки экспериментальных данных. – М.: ВИНИТИ, 1973. – 98с.
77. Завадский Ю.В. Моделирование случайных процессов. – М.: ВИНИТИ, 1974. – 100с.
78. Завадский Ю.В. Основные сведения по математический статистике. – М., 1971.
79. Загускин В.Л. Численные методы решения плохо обусловленных задач. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1976.
80. Зажигаев Л.С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л.С. Зажигаев, А.А. Кишьян, Ю.И. Романиков. – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.: ил., табл. – Приложение: с. 144-229 (16 табл.). – Библиогр.: с. 230-231.
81. Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. – М., 1968.
82. Зайцев Г.Н. Методика биометрических расчетов. Математическая статистика в экспериментальной ботанике. – М., 1973.
83. Зак Ш. Теория статистических выводов. – М.: Мир, 1975. – 776с.
84. Згуровський М. Технологічні передбачення як інструмент прийняття стратегічних рішень/ Дзеркало тижня. - №39(363). – 3 жовтня 2001. – С.14.
85. Злобин Ю.А. Принципы и методы изучения ценотических популяций растений. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1989. – 148с.

86. Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416с.
87. Иванов А.Б. Поверхости второго порядка// БСЭ. – Т.20. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 608с. – С. 72-73.
88. Иванов А.З., Круг Г.К. Оптимизация сложного технологического процесса методом эволюционного планирования эксперимента// Труды Москов. энергет. ин-та, 1963. – Вып.51.
89. Иванов А.З., Круг Г.К., Чирков И.М. Экспериментально-статистические методы получения математического описания и оптимизации сложных технологических процессов// Руководящие технические материалы. – М.: НИИТЭХЧМ, 1964. – Вып.2.
90. Изучение экстракционного разделения циркония и гафния с помощью метода симплекс-планирования/ Н.С. Смирнова, Ю.В. Грановский, Л.Н. Комисарова и др.// Теоретические основы химической технологии. – №4.– 1968.
91. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296с.
92. Іванюта І.Д. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посібник [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / І.Д. Іванюта, В.І. Рибалка, І.А. Рудоміно-Дусятська; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 14 / 18.2-271 від 11.02.2003 р.]. – К.: Слово, 2003. – 271 с:. іл., табл. – Завдання до самостійн. роботи: с. 235 – 261 (15 завд.). – Додатки: с. 262 – 267 (6 табл.). – Бібліогр.: с. 268 (6 назв). – ISBN 966 – 8407 – 01 – 6.
93. К вопросу о математическом планировании химического эксперимента/ Ю.В. Грановский, Л.Н. Комисарова, Н.С. Смирнова, В.И. Спицын// Докл. АН СССР. – 1967. – Т.176. - №3.
94. Кассандрова О.Н. Обработка результатов наблюдений: Учеб. пособие [для студ. высш. учеб. завед.] / О.Н. Кассандрова, В.В. Лебедев. – М.: Наука, 1970. – 104 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 103 – 104 (28 наимен.). – Приложения: с. 91 – 102 (6 табл.).

95. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. – М.: Химия, 1976.

96. Кельниц Ю.В. Теория ошибок измерений. – М.: Недра, 1967.

97. Кемени Дж.Дж., Снелл Дж.Л., Кнепп А.У. Счетные цепи Маркова/ Пер. с англ. – М.: Наука, 1987. – 416с.

98. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи/ Пер. с англ. под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1973. – 900с.

99. Коваленко И.И., Кеденко Б.В. Теория вероятностей. – К.: Вища шк., 1990. – 328с.

100. Коваленко И.И., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1982. – 320с.

101. Козлов М.В. Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 343с.

102. Козлов М.В., Прохоров А.В. Введение в математическую статистику. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 262с.

103. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – 4-е изд.; пер. с англ. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна и др.; под общ. ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1978. – 832 с. – Перевод за изд.: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. – Second, Enlargend and Revised Edition / Granino A. Korn, Ph. D., Theresa M. Korn, M.S. – NcGraw-Hill Book Company: New York-San Francisco-Toronto-London-Sydney, 1968. – ил., табл. – Библиогр.: с. 796 – 800 (183 наим.). – Указ. важн. обозн.: с. 801 – 803. – Предмет. указ.: с. 804 – 831. – Перечень табл. по гл.: с. 20 – 22.

104. Коробчук І.В., Коробчук Т.І. Курс теорії ймовірностей та математичної статистики. – Луцьк: Луцьк. держ. техн. ун-т, 2001. – Ч.1. – 148с. – Ч.ІІ – 80с.

105. Коробчук І.В., Коробчук Т.І. Лекції з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. – Луцьк: Луцьк. держ. техн. ун-т, 2001. – 143с.
106. Котов В.Н. Применение теории измерений в биологических исследованиях. – К.: Наукова думка, 1985. – 100с.
107. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 630с.
108. Крышев И.И., Сазыкина Т.Г. Математическое моделирование миграции радионуклидов в водных экосистемах. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 152с.
109. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – М.: Высш. шк., 1970. – Т.1. – 589с. – Т.2. – 422с.
110. Кузишин О.В. Критерії оцінки розподілу мікровиступів на поверхні твердого тіла / О.В. Кузишин, О.Г. Сіренко, Л.Я. Мідак, Г.О. Сіренко // Фізика і хімія твердого тіла. – 2008. – Т. 9. – № 2. – С.407-414: іл. 1, табл. 2. – Бібліогр.: с. 412 (52 назви).
111. Куршакова Ю.С. Корреляционный и регрессионный анализ в практическом применении. Теория отбора в популяциях растений. – Новосибирск, 1976.
112. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології. – К.: Фітосоціоцетр, 1998. – 132с.
113. Лакин Г.Ф. Биометрия: Учеб. пособие [для биол. спец. вузов] / Георгий Филиппович Лакин. – 4-е изд., пераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 352 с.: ил., табл. – Прилож.: с. 319 – 345 (26 мат. табл.). - Библиогр.: с. 346 – 347 (58 наим.). – Предмет. указ.: с. 348 – 350.
114. Леман Э. Проверка статистических гипотез. – М.: Наука, 1964.
115. Лещинський О.Л. Практикум з економетрії: Навч. посібник/ О.Л. Лещинський, В.В. Рязанцева. – К: Видавничий Дім «Персонал», 2009. – 256с. – Бібліогр.: с.251-252.
116. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1962. – 352с.

117. Лукомский Я.И. Теория корреляции и ее применение к анализу производства. – М.: Госстатиздат, 1961.
118. Лысенков А.Н. Математические методы планирования многофакторных медико-биологических экспериментов. – М., 1974.
119. Лысенков А.Н. О некоторых планах второго порядка и их использовании при исследовании многофакторных объектов// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С. 97-111.
120. Любищев А.А. Дисперсионный анализ в биологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 200с.
121. Максимов Г.К., Синицын А.Н. Статистическое моделирование многомерных систем в медицине. – Л., 1983.
122. Малюта М.Б., Заиграев А.Ю. Современные задачи оптимального планирования регрессионных экспериментов. – К.: Вища шк., 1989. – 64с.
123. Маркова Е.В. Латинские квадраты в планировании эксперимента// Заводская лаборатория. – 1968, №1.
124. Маркова Е.В. О применении комбинаторного анализа в планировании эксперимента// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.125-133.
125. Маркова Е.В. Руководство по применению латинских планов при планировании эксперимента с качественными факторами. – Челябинск: УралНИИстройпроект, 1971. – 156с.
126. Маркова Е.В., Лисенков А.Н. Планирование эксперимента в условиях неоднородностей. – М.: Наука, 1973. - 220с.
127. Маркова Е.В., Рохваргер А.Е. Математическое планирование химического эксперимента. – М.: Знание, 1971. – 32с.
128. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 310с.
129. Математические методы в биологии// Труды респуб. конф. – К.: Наукова думка, 1983. – 287с.

130. Математические модели экосистемы: экология и демографические последствия ядерной войны/ Под ред. А.А. Дородницына. – М.: Наука, 1986. – 176с.
131. Математическое моделирование и планирование эксперимента/ Под ред. Г.Н. Богачова. – Л.: Химия, 1971. - 189с.
132. Математичні методи в хімії і хімічній технології/ Ю.К. Руданський, Є.М. Мокрий, З.Г. Піх та ін. – Львів: Світ, 1993. – 208с.
133. Менчер Э.М. О новой методике движения по гиперплоскости методом эволюционного планирования// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.138-144.
134. Меркурьева Е.К. Биометрия в селекции и генетике сельскохозяйственных животных. – М., 1970.
135. Меркурьева Е.К., Шангин-Березовский Г.Н. Генетика с основами биометрии. – М., 1983.
136. Методологические проблемы современной биологии и медицины/ Под ред. Г.И. Царегородцева, В.П. Чекурина. – М.: Медицина, 1969. – 216с.
137. Методы идентификации математических моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1982. – 191с.
138. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 1. Общие методы анализа биологических систем/ Под ред. И.И. Любимова. – К.: Вища шк., 1980. – 240с.
139. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 2. Методы синтеза алгебраических и вероятностных моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1981. – 312с.
140. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 3. Методы синтеза динамических моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1981. – 328с.
141. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 5. Информационные методы синтеза моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1982. – 240с.

142. Методы Монте-Карло в статистической физике/ К. Биндер, Д. Сиперли, Ж.-П. Ансен и др./ Под ред. К. Биндера. – М.: Мир, 1982. - 400с.
143. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Физматгиз, 1961.
144. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. – М.: Физматгиз, 1962.
145. Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике / Пер. с нем. и предисловие В.М. Ивановой.– М.: Финансы и статистика, 1982. – 272 с.: ил.
146. Налимов В.В. Логические основания планирования эксперимента / В.В. Налимов, Т.И. Голикова. – М.: Металлургия, 1976. – 128 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 126 – 128 (81 наим.).
147. Налимов В.В. Применение математической статистики при анализе вещества. – М.: Физматгиз, 1960. – 430с.
148. Налимов В.В. Статистические методы описания химических и металлургических процессов. – М: Металлургиздат, 1963. – 59с.
149. Налимов В.В. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов / В.В. Налимов, Н.А. Чернова. – М.: Наука, 1965. – 340 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 328 – 338 (204 наим.). – Предмет. указ.: с. 339 – 340. – Приложения: с. 309 – 327 (I. Элементы матричной алгебры. Симплексы. II. Планы дробных реплик).
150. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 207с.
151. Неділько С.А. Математичні методи в хімії: підручник [для студ. хім. спеціал. вищ. навч. закладів] / Сергій Неділько; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 1 / 11-1536 від 13.04.2004 р.]. – К.: Либідь, 2005. – 256 с.: іл. – Завдання для самостійн. роботи та бібліогр. в кінці розд. – ISBN 966 – 06 – 03843.
152. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1968.

153. Нелинейная корреляция и регрессия / С.Н. Воловельская, А.И. Жилин, С.А. Кулиш, В.Б. Сивый. – К.: Техніка, 1971. – 130 с.
154. Нельсон Э. Радикально-элементарная теория вероятностей/ Пер. с англ. А.А. Рубана. – Новосибирск, 1995. – 111с.
155. Основы научных исследований/ В.И. Крутов, И.М. Грушко, В.В. Попов и др./ Под ред. В.И. Крутова, В.В. Попова. – М.: Высш. шк., 1989. – 400с.
156. Оценка и сравнение некоторых двухфакторных планов в планировании эксперимента/ Ю.В. Грановский, Н.С. Смирнова, Л.Н. Комисарова, В.И. Спицын// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.112-116.
157. Палеев Н.Р., Кельман И.М. Экстраполяция// БСЭ. – М.: Сов. энциклопедия, 1978. – 632с. – С. 18.
158. Перспективы медицинской генетики/ Под ред. И.П. Бочкова. – М.: Медицина, 1982. – 400с.
159. Петунин Ю.И. Приложение теории случайных процессов в биологии и медицине. – К.: Наукова думка, 1981. – 320с.
160. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т.1. – М.: Наука, 1976. – Т.1. – 456с; Т.2. – 576с.
161. Питербарг В.И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. – М.: МГУ, 1988. – 174с.
162. Питмен Э. Основы теории статистических выводов/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 105с.
163. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефер и др. / пер. с нем. Г.А. Фоминой, Н.С. Лецкого; под ред. Э.К. Лецкого. – М.: Мир, 1977. – 552 с. Перевод за изд.: Statistische Versuchsplanung und–auswertung in der Stoffwirt–shaft / von einem Autorenkollektiv Herausgeber: Klaus Hartmann, Eduard Lezki, Wolgang Schäfer. – VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1974.: ил., табл. – Библиогр. в конце гл. – Мат. приложения: с. 516 – 540. – Предмет. указатель: с. 541 – 547.

164. Планирование эксперимента при получении отверженных лаковых покрытий на основе хлорсульфированного полиэтилена/ Г.Я. Лозовик, Е.В. Маркова, А.А. Донцов, И.Я. Клинов// Лакокрасочные материалы и их применение. - №6.– 1967.
165. Планирование эксперимента. Сборник первого совещания по планированию. – М.: Наука, 1966.
166. Плохинский Н.А. Биометрия. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.
167. Поверхности вращения// БСЭ. – Т.20. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 608с. – С. 72.
168. Позняк Э.Г. Дифференциальная геометрия// БСЭ. – Т.8. - М.: Сов. энциклопедия, 1972. – 592с. – С. 330-332.
169. Позняк Э.Г. Поверхностей теория// БСЭ. – Т.20. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 608с. – С. 71-72.
170. Прикладная статистика/ С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин/ Под ред. С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1980. – 607с.
171. Приложение математических моделей к анализу эколого-экономических систем/ Под ред. И.А. Башалханова, В.А. Батурина. – Новосибирск: Наука, 1988. – 215с.
172. Применение латинских прямоугольников и кубов в планировании эксперимента при поиске новых ингибиторов коррозии/ А.Х. Альхамедан, Е.В. Маркова, В.И. Скрипниченко, М.Ф. Герасимова// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.186-191.
173. Применение математико-статистического метода при оптимизации процесса вулканизации эластомеров солями насыщенных кислот/ А.А. Донцов, Е.В. Маркова, В.Э. Михлин, Б.А. Догадкин// Каучук и резина, 1967. - №10.
174. Применение математической статистики при исследовании процесса формования и вытягивания полипропиленового волокна/ Н.С. Иванов,

Е.Н. Марина, Д.Ф. Фильберт, С.Я. Межирова, Ю.П.Адлер// Карбоцепные волокна. – М.: Химия, 1966.

175. Проблемы анализа биологических систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 128с.
176. Проблемы планирования эксперимента. Сборник статей. – М.: Наука, 1969.
177. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные положения. Предельные теоремы. Случайные процессы.- М.: Наука, 1987. – 397с.
178. Пуанкарэ Жюль Анри// БСЭ. – Т.21. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 440 с. – С.211.
179. Райзер Г.Д. Комбинаторная математика. – М.: Мир, 1966.
180. Рего К.Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений: Справочное пособие. – К.: Техніка, 1987. – 128 с.: ил. – Табл. 66. – Библиогр.: С.126 (12 назв.).
181. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высш. шк., 1966. – 608с.
182. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Инлитиздат, 1963.
183. Рокицкий П.Ф. Биологическая статистика. – Минск, 1967.
184. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1971.
185. Румшинский Л.З. Элементы теории вероятностей. – М.: Наука, 1976.
186. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 656с.
187. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. –М.: Наука, 1968.
188. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1970. – 304с.

189. Свирежев Ю.М., Пасеков В.П. Основы математической генетики. – М.: Наука, 1982. – 512с.

190. Секей, Габор. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике/ Пер. с англ. В.В. Ульянова; под ред. В.В. Сазонова. – М.: Мир, 1990. – 240с.

191. Сепетлиев Д. Статистические методы в научных медицинских исследованиях. – М., 1968.

192. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера / Виталий Петрович Сигорский. – 2-е изд., стереотип. – К.: Техніка, 1977. – 768 с.: – ил., табл. – Библиогр. в конце гл. – Предмет. указ.: с. 752 – 764.

193. Сиренко Г.А. Основы научных исследований: Программа и методические указания для химиков-технологов. – Хмельницкий: Хмельн. технол. ин-т, 1979. – 34с.

194. Сиренко Г.А., Мандзюк И.А. Оптимизация состава эпоксидных композиций// Пластические массы. – 1977. - №8. – С.25-26.

195. Сіренко Г.О. Методи оцінок впливу факторів на функції відгуку та процедури відсіювання параметрів оптимізації при вирішенні багатопараметричних завдань у матеріалознавстві / Г.О. Сіренко, О.В. Кузишин, О.Г. Сіренко, Л.Я. Мідак, Л.М. Солтис // Фізика і хімія твердого тіла. – 2009. – Т. 10. – № 2. – С.423-439: іл. 2, табл. 10. – Бібліогр.: с. 437-438 (26 назв).

196. Сіренко Г.О., Мідак Л.Я. Про один із підходів до оцінки параметрів трибологічної системи з титановою складовою// Проблеми трибології. – 2002. - № 3, 4. – С. 36-46.

197. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 6. Статистичні характеристики стадій розвитку сосни кедрової європейської (Pinus cembra L.) / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XII. – С. 176-188: іл. 3, табл. 7. – Бібліогр.: с. 187 (12 назв).

198. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 3. Статистичні характеристики. Кореляційний та реґресійний аналізи / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин, Л.Я. Мідак // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XI. – С. 76-88: іл. 4, табл. 7. – Бібліогр.: с. 89 (15 назв).

199. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 4. Розподіл особин сосни кедрової європейської (Pinus cembra L.) та ялини звичайної (Picea abies) за нормальним законом Ґаусса / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин, Л.Я. Мідак // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XI. – С. 90-98: іл. 1, табл. 1. – Бібліогр.: с. 97 (16 назв).

200. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 5. Статистичні характеристики. Дисперсійний аналіз: статистична рівність ряду математичних сподівань особин сосни кедрової європейської (Pinus cembra L.) та ялини звичайної (Picea abies) / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XI. – С. 98-118: іл. 8, табл. 13. – Бібліогр.: с. 117 (12 назв).

201. Сіренко О.Г. Стан популяцій сосни кедрової європейської (Pinus cembra L.) в українських Карпатах: екологічна приуроченість деревостанів (загальний та кореляційний аналіз) / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин, Л.Я. Мідак // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XII. – С. 188-208: іл. 6, табл. 9. – Бібліогр.: с. 207 (32 назви).

202. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 1. Постановка завдання / О.Г. Сіренко , О.В.Кузишин // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ:

Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. X. – С. 88-95: іл. 4. – Бібліогр.: с. 94 (16 назв).

203. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 2. Статистичні характеристики. Дисперсійний аналіз (статистична рівність ряду ґенеральних дисперсій) / О.Г.Сіренко , О.В. Кузишин // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. X. – С. 95-113: іл. 1, табл. 6. – Бібліогр.: с. 112 (34 назви).
204. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. – К.: Либідь, 1990. – 167с.
205. Смирнов Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, 1969. – Табл. II.
206. Смуров А.В. Статистические методы в исследовании пространственного размещения организмов// Методы почвенно-зоологических исследований. – М.: Наука, 1975. – С.217-240.
207. Снедекор Д.У. Статистические методы в применении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии. – М., 1961.
208. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. – М., 1972.
209. Соколов Д.К. Математическое моделирование в медицине. – М, 1974.
210. Солтис М.М., Закордонський В.П. Теоретичні основи процесів хімічної технології. – Львів: Видавн. центр Львів. нац. ун-ту імені Івана Франка, 2003. – 430с.: іл. (80 рис.). – 36 табл. – 1.3. Методи математичної статистики: С.24-46. – 6.6. Дослідження хіміко-технологічного процесу з використанням методів кореляційного та реґресійного аналізу: С. 381-405. – Додатки. Статистичні табл.: С.406-410 (4 табл.). – Бібліогр.: С. 413-415 (40 назв). – Предмет. покажчик: С.416-423. – Умов. познач.: С.424-426. – ISBN 966-613-161-7.
211. Сопряжонные гиперболы// БСЭ. – Т.24(I). – М.: Сов. энциклопедия, 1976. – 608с. – С. 190.

212. Спиридонов А.А. Планирование эксперимента: Учебное пособие / А.А. Спиридонов, Н.Г. Васильев. – Свердловск: Изд-во Урал. политехн. ин-та, 1975. – 150 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 147-148 (23 наименов.).
213. Спиридонов В.П., Лопаткин А.А. Математическая обработка физико-химических данных. – М.: МГУ, 1971.
214. Справочник по прикладной статистике/ Под ред. Э.Ллойда, У. Ледермана/ Пер. с анг. под ред. Ю.М. Тюрина. – М.: Финансы и статистика, 1980. – Т.1. – 510с.
215. Стент Г., Кэлиндер Р. Молекулярная генетика/ Пер. с англ. Ю.Н. Зографа, Т.С. Ильиной, В.Г. Никифорова. – М.: Мир, 1981. – 648с.
216. Степнов М.Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний / Михаил Никитович Степнов. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 229-230 (36 назв.).
217. Стюарт Иэн. Тайны катастрофы/ Пер. с фр. – М.: Мир, 1987. – 76с.
218. Судьина Е.Г. Вероятность в биологии. – К.: Наук. думка, 1985. -96с.
219. Сытник В.Ф. Основы научных исследований . – К.: Вища шк., 1978. – 184с.
220. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиноминальных моделей/ В.З. Бродский, Л.И. Бродский, Т.И. Голикова и др. – М.: Металлургия, 1982. – 752с.
221. Теория вероятностей и математическая статистика: Респ. межвед. науч. сб. – К.: Вища шк., 1987. – Вып. 36. – 136с.; 1987. – Вып. 37. – 133с.; 1988. – Вып.38. – 131с.
222. Теория подобия и размерностей. Моделирование/ П.М. Алабужев, В.Б. Геронимус, П.М. Минкевич, Б.А. Шеховцов. – М.: Высш. шк., 1968. – 208с.
223. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: ТВ і МС, 194. – Вип. 50. – 143с.; 1994. – Вип.51. – 130с.
224. Терентьев П.В., Ростова Н.С. Практикум по биометрии. – Л., 1977.

225. Тихомиров В.Б. Планирование и анализ эксперимента / Владислав Борисович Тихомиров. – М.: Легкая индустрия, 1974. – 264 с.: ил., табл. – Приложение: с. 255-257 (4 табл.). – Библиогр.: с. 258-261 (99 наименов.).

226. Ткаченко Н.А. Математические методы и АСУ в бытовом обслуживании. – К.: Техніка, 1980. – 112с.

227. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. Серия: Теоретические основы технической кибернетики / Дуглас Дж. Уайлд; пер. с англ. А.Н. Кабалевского, Е.П. Маслова, В.Д. Спиридонова; под ред. А.А. Фельдбаума. – М.: Наука, 1967. – 268 с. Перевод за изд.: Optimum seeking methods / Douglass J. Wilde. – Department of chemical Enginnering Stanford University. – Prentice-Hall, Inc. – Englewood Cliffs, N.J., 1964.: ил., табл. – Упражнения в конце гл. – Библиогр.: в подстроч. примеч. – Предмет. указатель: с. 265 – 267.

228. Уилсон Р. Введение в теорию графов / Р.Дж. Уилсон; пер. с англ. И.Г. Никитиной; под ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1977. – 208 с. – Перевод за изд.: Introduction to Graph Theory / Robin J. Wilson. – Oliver and Boyd Edinburg, 1972.: ил. – Упр. после параграф. – Предмет. указатель: с. 202 – 205. – Приложение (табл.): с. 200. – Библиогр.: с. 201 (16 назв.).

229. Урбах В.Ю. Статистический анализ в биологических и медицинских исследованиях. – М., 1975.

230. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов): монография / Валерий Вадимович Федоров. – М.: Наука, 1971. – 312 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 309 – 312 (79 наим.).

231. Федорова Г.В. Практикум з біогеохімії для екологів: Навчальний посібник. – К.: КНТ, 2007. – 288 с.: іл. (34 рис.). – Табл. 32. – Ч.І. Розділ 2. Сучасні методи аналізу в біогеохімії: с. 31-87. – Запитання для

контролю знань: після гл. – Додатки: с. 263-266. – Бібліогр.: с.267-270 (55 назв). – Предмет. покажчик: с.271-281. – ISBN 966-373-054-4.

232. Филаретов Г.Ф. К вопросу о построении нелинейной регрессионной модели по данным пассивного эксперимента// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.12-19.
233. Финни Д. Введение в теорию планирования экспериментов. – М.: Мир, 1970.
234. Флейс Дж. Статистические методы для изучения таблиц, долей и пропорций/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 319с.
235. Фогель Ф., Мотульски А. Генетика человека. В 3-х томах. – Ч.1. История, хромосомы человека, формальная генетика/ Пер. с англ. Т.Ю. Переслени, С.В. Агеева, К.Н. Гринберга. – М.: Мир, 1989. – 312с.
236. Фогель Ф., Мотульски А. Генетика человека. В 3-х томах. – Ч.2. Действие генов, мутации, популяционная генетика/ Пер. с англ. А.Г. Имашевой, С.Л. Мехедова, Е.Я. Тетушкина. – М.: Мир, 1990. – 378с.
237. Фогель Ф., Мотульски А. Генетика человека. В 3-х томах. – Ч.3. Эволюция человека, генетика поведения, практические аспекты/ Пер. с англ. С.В. Агеева, Е.Я. Тетушкина, А.Н. Чепковой. – М.: Мир, 1990. – 366с.
238. Фоменко А.Т. Статистическая хронология. – М.: Знание, 1990. – 46с.
239. Фомин С.В., Беркинблит М.Б. Математические проблемы в биологии. – М.: Наука, 1973.
240. Хайруллин Р.Х. Математические методы в генетике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1988. – 186с.
241. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: Иностранная литература, 1956.
242. Хан Г., Шапиро С. Статистические методы в инженерных задачах. – М., 1969.
243. Хеттманспергер Т. Статистические выводы, основанные на рангах/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 334с.

244. Хикс Ч. Основные принципы планирования эксперимента / Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 406 с.

245. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами/ Пер. с англ. В.Д. Скаржинского/ Под ред. В.Г. Горского. – М.: Мир, 1973. – 957с.

246. Холл М. Комбинаторный анализ. – М.: Инлитиздат, 1963.

247. Хомяков П.П., Адлер Ю.П., Налимов В.В. Выявление факторов, влияющих на скорость хлорирования титановых шлаков в расплаве// Заводская лаборатория. – 1963. – Т.29, №1.

248. Худсон Д. Статистика для физиков. – М.: Мир, 1970.

249. Цыпкин Я.З. О восстановлении характеристики функционального преобразования по случайно наблюдаемым точкам// Автоматика и телемеханика. – 1965. - №11.

250. Чернышев М.К., Гаджиев М.Ю. Математическое моделирование иерархических систем с приложениями к биологии и экономике. – М.: Наука, 1983. – 192с.

251. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987. – 240с.

252. Шакалис В.В. Моделирование технологических процессов. – М.: Машиностроение, 1973. – 136с.

253. Шведков Е.Л. Элементарная математическая статистика в экспериментальных задачах материаловедения. – К.: Наукова думка, 1975. – 110с.

254. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. – М.Наука, 1972.

255. Шеффе Г. Дисперсионный анализ/ Пер. с англ. – М.: Физматгиз1963. – 628с.

256. Шкільняк С.С. Математична логіка. Основи теорії алгоритмів: Навч. посібник/ С.С. Шкільняк. – К.: Видавничий Дім «Персонал», 2009. – 280с. – Бібліогр. в кінці частин.

257. Экстремум// БСЭ. – М.: Сов. энциклопедия, 1978. – 632с. – С. 19.

258. Эллиот Р. Стохастический анализ и его приложения/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 351с.
259. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. – М.: Мир, 1968.
260. Box G.E.P., Behnken D.W. Simplexsum Designs: A Class of Second Order Rotatable Designs Derivable from Those of First Order// Annals of Mathematical Statistics. – 1960. – V.31. – N4.
261. Box G.E.P., Behnken D.W. Some New Three Level Designs for the Study of Quantitative Variables// Technometrics. – 1960. – V.2, N4.
262. Connor W.S., Young S. Fractional Factorial Designs for Experiments with Factors of two and three Levels// National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series. – 1961. – 58.
263. Davies O.Z., Hay W.A. The construction and uses of fractional factorial designs in industrial research// Biometrics. – 1950,– N6.
264. Federer W.T. Experimental Design. – N.Y.: Macmillan Comp., 1955.
265. Fisher R.A. The Design of Experiments. – Edinburg-London: Oliver and Boy, 1960.
266. Fisher R.A. Yates F. Statistical tables for biological, agricultural and medical research. – Edinburg-London: Oliver and Boy, 1957.
267. Hartley H.O. Smallest Composite Designs for Quadratic Response Surface// Biometrics. – 1959. – V.15, N1.
268. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method. – Ann. Math. Statist, 1951. – Vol.25, N1.
269. Spendley W., Hext G.R., Himsworth F.R. Sequential Application of Simplex Designs in Optimization and Evolutionary Operation// Technometrics. – 1962. – V.4, N4.