ЛЕКЦІЯ

НА ТЕМУ:

КОРЕЛЯЦІЙНА АНАЛІЗА

ВСТУП

Актуальність теми. Метою більшости досліджень в хімії та хемічній промисловости є вирішення складних багатофакторних експериментальних завдань, які пов`язані зі встановлення надійних зв`язків між випадковими величинами, пошуком оптимальних рішень якости матеріалів, пошуком оптимальних умов проведення хеміко – технологічних процесів, розробкою раціональних конструкцій хемічного обладнання тощо.

Існують два різних підходи до вирішення таких завдань. Традиційні методи досліджень в хемії та хемічній технології пов`язані з «пасивним» експериментом, який потребує значних витрат і часу. У такому експерименті вирішенню експериментальних завдань передує всебічне дослідження механізму процесу та властивостей речовини. «Пасивний» експеримент пов`язаний з почерговим варіюванням окремих змінних. Базуючись на результатах такого дослідження можна створити теорію процесу, за допомогою якої можна вирішувати експериментальні завдання. Але точність і надійність таких результатів низька. Та й системи, які належить описати теоретично та оптимізувати є багатофакторними, багаторівневими та виявляються настільки складними, що не підлягають теоретичному вивченню у прийняті терміни. Окрім того, у більшості випадків експериментальні завдання вирішуються експериментально при неповному знанні механізмів процесів та явищ. Методологія находження таких рішень залишається неформалізованою.

Другий метод використовує теорію «активного» експерименту, що дозволяє вибрати оптимальну стратегію дослідження при неповноті знань про об`єкт дослідження та багатофакторному завданні. При цьому на кожному етапі дослідження використовують математичне планування експерименту. Математичне планування експерименту базується на низці загально методичних концепцій:

1) дисперсійної аналізи;
2) регресійної аналізи;
3) кореляційної аналізи;
4) рандомізації (надання випадкового характеру реалізації дослідів та їх повторень);
5) послідовного експерименту;
6) оптимального використання факторного простору;
7) компактности інформації;
8) статистичних оцінок тощо.

Розділ 1
КОРЕЛЯЦІЙНА АНАЛІЗА

1.1. Загальні означення

1. Кореляція (пізньолатинське correlatio – співвідношення) – взаємозв`язок, взаємозалежність, взаємовідповідність; співвідношення понять, функцій, предметів, підприємств; почуттів, поведінки людей тощо. Вперше ( у 1800 – 1805 р. р.) у науковий обіг було введено означення «кореляція» Жоржем Кув`є.

2. Існує цілий клас завдань, пов`язаних із аналізою зв`язку між двома $(x\sim y)$ чи кількома змінними $(x_1, x_2, \ldots \sim y)$, або $x_1, x_2, \ldots \sim y_1, y_2, \ldots$

3. Розрізняють два види математичних залежностей (зв`язків) однієї величини від іншої або кількох інших величин:

а) **детермінована** (функціональна; невипадкова; жорстка; чиста; строга; математична; регулярна залежність тощо), коли кожному значенню змінної (арґументу (x)) або кільком залежним величинам (арґументам $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots x_n$) відповідає певне значення іншої величини (функції (y)) або певним значенням інших величин.

Такий зв`язок:

$$y = f(x) \quad \text{або} \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

носить назву функціонального, . . . ,

Так, величини $S = \frac{gt^2}{2}$, де g = const, кожному значенню арґумента (t) відповідає певне детерміноване значення (S) функції;

б) **випадкова**, коли між випадковими величинами такого зв`язку немає. Залежність між випадковими величинами зветься схоластичною (випадковою, ймовірністною, недетермінованою, нежорсткою, нестрогою, нерегулярною, кореляційною тощо), коли кожному значенню арґумента (a_x, σ_x^2, σ_x,. . .) відповідає певний закон розподілу функції, тобто, коли на зміну однієї (або кількох) випадкових величин інша випадкова величина реагує зміною параметрів свого розподілу $(a_y, \sigma^2_y, \sigma_y, \ldots)$. Такий зв`язок носить назву стохастичного, ймовірного, кореляційного, . . .

4. Чому існують стохастичні зв`язки? Окрім впливу основних факторів та їх рівнів, є:

а) вплив випадкових неконтрольованих факторів та їх рівнів на об`єкт дослідження або природний об`єкт спостереження;

б) вплив випадкових контрольованих але некерованих факторів;

в) окрім того неможливо, практично не вдається зафіксувати рівні факторів, вони «плавають» біля певної середньої.

Все це впливає на функцію відгуку, і вона теж має випадкові значення.

5. Стохастичний зв`язок має дві складові:

1) власне схоластичну складову *St*, яка пов`язана із залежністю випадкових величин y і визначається дією залежних факторів;

2) власне випадкову складову *Ra* , яка обумовлена дією індивідуальних випадкових факторів, які впливають на одну із випадкових величин.

6. а) якщо $St \neq 0$, $Ra = 0$ – функціональний зв`язок;

б) якщо $St = 0$, $Ra \neq 0$ (чи і $Ra = 0$) – незалежні величини;

в) якщо $St \neq 0$, $Ra \neq 0$ – стохастичний (кореляційний) зв`язок;

г) якщо одна величина y (змінна a_y *і* σ^2_y) не реагує на зміну a_x, а реаґує лише на зміну σ^2_x, то такі величини є некеровані.

7. Від співвідношення St/Ra залежить сила щільності зв`язку і це є предметом кореляційної аналізи.

Тому, завдання кореляційної аналізи (разом із регресійною аналізою) (регресія від латинського regressio – зведення, звертання, зворочення від латинського regressus – зворотній рух, відход) полягає у тому, щоби встановити якісні показники математичної моделі:

а) на скільки модель краще, добротніше (адекватно) описує залежність y ~ f(x), [чи $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots, x_n)$ тощо]. Лінійна (1) чи нелінійна (2) залежність (рис.1.1).

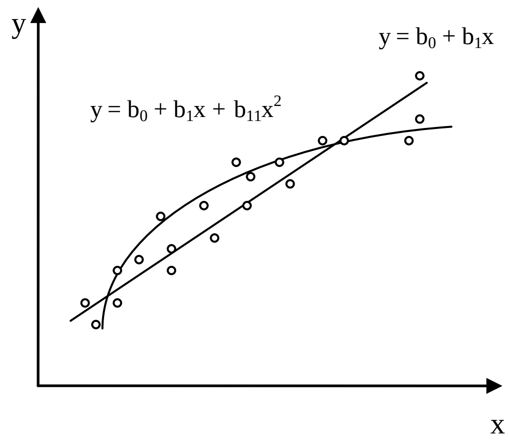
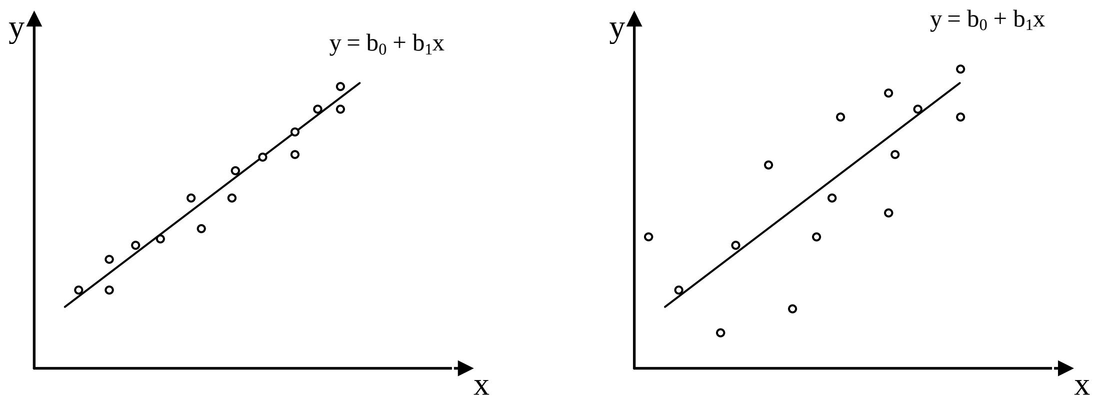


Рис.1.1. Апроксимація експериментальних даних лінійною (1) та нелінійною (2) функціями.

б) Яка щільність зв`язку між x та y. (рис.1.2)



а) б)

Рис. 1.2. Сильний (а) та слабкий (б) кореляційний лінійний зв`язок $y = f(x)$.

8. Тобто виникає необхідність виразити щільність (силу зв'язку) певним числом:

а) для лінійного зв`язку – коефіцієнт кореляції;

б) для нелінійного зв`язку – кореляційне співвідношення (індекс кореляції).

1.2. Лінійний зв`язок, коефіцієнт кореляції

1. Нехай маємо дві ґенеральні сукупности двох випадкових величин. Обидві величини мають нормальний закон розподілу (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Параметри генеральних сукупностей величин

Сукупність величин		Параметри
X :	$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n$	$N \to \infty, \mu_x, \sigma^2_x, \sigma_x, \dots$
$У$:	$y_1, y_2, y_3, \dots, y_i, \dots, y_n$	$N \to \infty, \mu_y, \sigma^2_y, \sigma_y, \dots$

2. Кількісною оцінкою щільности лінійного зв`язку між величинами X і $У$ двох генеральних сукупностей буде – генеральний коефіцієнт кореляції:

$$\rho_{x,y} = \rho_{1,2} = \rho = \frac{M_{1/1}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad , \qquad (1.2)$$

де $$M_{1/1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a_x)(y - a_y)\varphi(x, y)dxdy \quad ; \qquad (1.3)$$

– генеральний змішаний центральний момент другого порядку;

$$a_x = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx \quad – \qquad (1.4)$$

– математичне сподівання випадкової величини X (генеральна середня);

$$a_y = \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)dy \quad – \qquad (1.5)$$

– математичне сподівання випадкової величини $У$ (генеральна середня);

φ(x), φ(y) – щільність ймовірности розподілу випадкової величини *X, У* відповідно;

φ(x,y) – щільність ймовірностей двовимірного сумісного розподілу випадкових величин X, У;

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \quad , \quad \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} \quad - \tag{1.6}$$

– генеральні середньо квадратичні відхилення.

Генеральні дисперсії:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a_x)^2 \varphi(x) dx \quad ; \tag{1.7}$$

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y-a_y)^2 \varphi(y) dy \, . \tag{1.8}$$

Коефіцієнт кореляції змінюється у межах:

$$0 \le |\rho| \le 1, \tag{1.9}$$

$$\text{або} \quad 0\% \le |\rho| \le 100\% \, ; \tag{1.10}$$

$$\rho: \; -1 \,.\,.\,.\; 0 \,.\,.\,.\; +1; \tag{1.11}$$

$$\rho: -100\% \,.\,.\,.\; 0 \,.\,.\,.\; +100\ \%. \tag{1.12}$$

Якщо:

1) $\rho=0$, то x,y незалежні випадкові величини, тому такі величини некорельовані;

2) $\rho \to 0$, для нелінійних випадкових величин;

3) $|\rho|=1$ (-1, або +1), зв`язок функціональний;

4) $0<|\rho|<1$, стохастичний кореляційний зв`язок;

5) якщо $\rho > 0$, то при $x\uparrow \to y\uparrow$ або при $x\downarrow \to y\downarrow$;

6) якщо $\rho < 0$, то при $x\uparrow \to y\downarrow$ або при $x\downarrow \to y\uparrow$.

3. Розрахунок вибіркового коефіцієнта кореляції.

Позначимо вибірковий коефіцієнт кореляції так: $r = r_{1,2} = r_{x,y}$.

Оцінками генеральних показників є вибіркові:

вибіркова сукупність $\xrightarrow[\text{ОЦІНКА}]{}$ генеральна сукупність

$$\overline{X} \xrightarrow[\text{ОЦІНКА}]{} \mu_x \qquad \overline{y} \xrightarrow[\text{ОЦІНКА}]{} \mu_y$$

$$S_x^2 \xrightarrow[\text{ОЦІНКА}]{} \sigma_x^2 \qquad S_y^2 \xrightarrow[\text{ОЦІНКА}]{} \sigma_y^2$$

$$S_x \xrightarrow[\text{ОЦІНКА}]{} S_x^2 \qquad S_y \xrightarrow[\text{ОЦІНКА}]{} S_y^2$$

. . . .

. . . .

$$r_{x,y} \xrightarrow[\text{ОЦІНКА}]{} \rho_{x,y}$$

Розраховують вибірковий коефіцієнт кореляції за формулою:

$$r_{x,y} = \frac{m_{1/1}}{S_x \cdot S_y} \ , \tag{1.13}$$

де $m_{1/1} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\right] = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{i=1}^{N}y_i\right] =$

$$= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i \cdot y_i) - N\overline{x}\overline{y}\right] - \tag{1.14}$$

– вибірковий змішаний центральний момент другого порядку.

Вибіркові середньо квадратичні відхилення:

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}x_i^2 - N\left(\overline{x}\right)^2\right]} \ ; \tag{1.15}$$

$$S_y = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}y_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}y_i\right)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}y_i^2 - N\left(\overline{y}\right)^2\right]} . \tag{1.16}$$

Тоді:

$$r_{x,y}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_iy_i)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i\sum_{i=1}^{N}y_i}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N}x_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}y_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}y_i\right)^2\right]}}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_iy_i)-N(\bar{x}\bar{y})}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N}x_i^2-N\left(\bar{x}\right)^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}y_i^2-N\left(\bar{y}\right)^2\right]}}\ . \qquad (1.17)$$

1.3. Значущість та довірчі інтервали для коефіцієнта кореляції

1. Вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{x,y}$ як випадкова величина може приймати різні значення при повторних дослідженнях (або спостереженнях), тобто при «витягуванні» вибірки з генеральної сукупності.

Тоді будемо мати різні оцінки генерального коефіцієнта кореляції:

2. Навіть, коли $\rho_{x,y} = 0$ (немає лінійного кореляційного зв`язку) $r_{x,y} \neq 0$. Тоді необхідно перевірити нульову гіпотезу :

$$\left.\begin{array}{l} H_0:\ \rho = 0 \\ \quad\uparrow \text{оцінка} \\ |r_{x,y}| \neq 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(немає лінійного кореляційного зв`язку)}$$

Альтернативна гіпотеза:

$$\left.\begin{array}{l} H_1:\ \rho \neq 0 \\ \quad\uparrow \text{оцінка} \\ |r_{x,y}| \neq 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(є лінійний кореляційний зв`язок)}$$

3. Перевірка значущості коефіцієнта кореляції за критерієм Стьюдента.

При великому обсязі виборки, наприклад N > 100 і $|\rho| \neq 1$ (тобто відсутности функціонального зв`язку) розподіл вибіркового коефіцієнта кореляції $r_{x,y}$ підпорядкований нормальному закону розподілу (Н.З.Р.) з параметрами :

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \rho_{x,y} \\ \sigma_r &= \frac{\sqrt{1-\rho_{x,y}^2}}{\sqrt{N-1}} \end{aligned}\right\} \qquad (1.18)$$

Так як при $N \to \infty$ (або $N \to \max$) $\sigma_r \approx S_r$, то

$$S_r = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{N-1}} \qquad (1.19)$$

Пронормуємо r : введемо нову випадкову змінну Z

$$Z = \frac{r-a_r}{\sigma_r} = \frac{r-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sqrt{N-1}\ , \qquad (1.20)$$

Тоді величину Z розподілено за нормальним законом розподілу з параметрами:

$$\left.\begin{aligned} a_Z &= 0 \\ \sigma_Z^2 &= 1,\ \sigma_Z = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1.21)$$

Якщо $\sigma_r \approx S_r$, тоді (19) зводиться, що Z підпорядковано розподілу Стьюдента і перевірка H_0: $\rho = 0$ зводиться до розрахунку:

$t_{РОЗР.} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\sqrt{N-2}$ і порівняння $|t_{РОЗР}|$ з табличним значенням критерія Стьюдента: $t_{ТАБ}\{\alpha; f = N - 2\}$.

Якщо : $|t_{РОЗР}| \le t_{ТАБ}$, то з ймовірністю $p = 1 - \alpha$ приймаємо H_0: $\rho = 0$ (немає лінійного зв`язку):

Тут оцінка ступеня нелінійності :

$$\xi_2(t) = \frac{t_{ТАБ}}{|t_{РОЗР}|} \qquad (1.22)$$

Якщо $|t_{РОЗР}| > t_{ТАБ}$, то з ймовірністю $p = 1 - \alpha$ нульова гіпотеза H_0: $\rho = 0$ відкидається , приймається альтернативна гіпотеза H_1: $\rho \neq 0$ (є щільний лінійний зв`язок):

Тут оцінка ступеня лінійності :

$$\xi_1(t) = \frac{|t_{РОЗР}|}{t_{ТАБ}}. \tag{1.23}$$

Коефіцієнт кореляції значущий.

Для довірчої ймовірності $p = 1 - \alpha$ довірчий інтервал генерального коефіцієнта кореляції становить:

$p\ \{[\ r - (t_{ТАБ}\ S_r)] \le \rho < [\ r + (t_{ТАБ} S_r)]\} = 1 - \alpha$,

де $t_{ТАБ}\{\alpha;\ f = N - 2\}$; рівень значущості : $\alpha = 1 - p$.

4. При малому обсязі вибірки (обмеженому) і порівняно високої лінійної кореляції: (N < 60 – 100) розподіл вибіркового коефіцієнта кореляції r суттєво відрізняється від нормального закону розподілу (рис. 1.3)

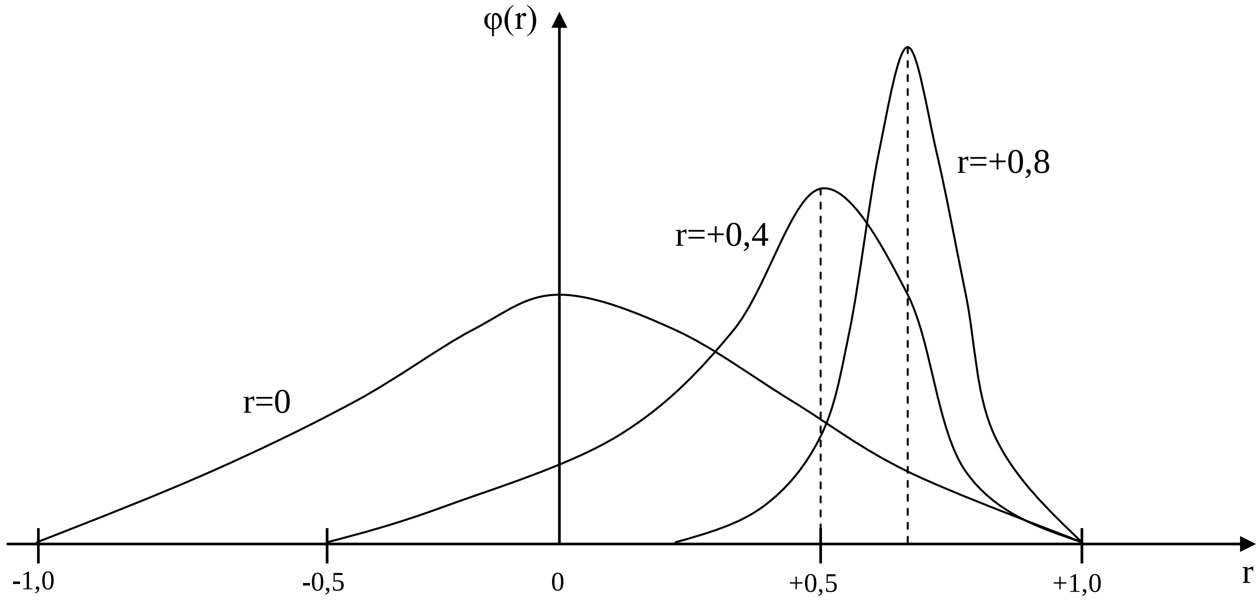


Рис. 1.3. Розподіл вибіркового коефіцієнта кореляції.

Використаємо перетворення Фішера:

$$Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}, \tag{1.24}$$

де r – вибірковий коефіцієнт кореляції.

Випадкова величина Z буде розподілена за нормальним законом (рис. 1.4) з параметрами:

$$\mu_Z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(N-2)} \tag{1.25}$$

$$\sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} \tag{1.26}$$

Так як [$\frac{\rho}{2(N-2)}$ << σ_Z], то в (1.3) цим числом можна знехтувати тоді:

$$\mu_Z \approx \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} \tag{1.27}$$

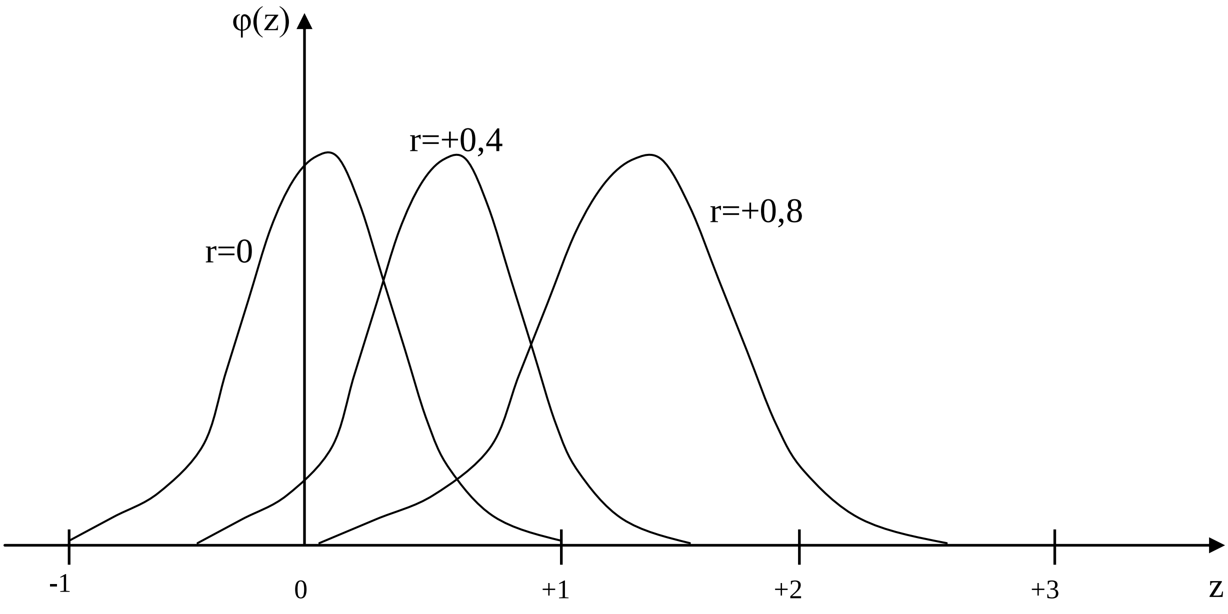


Рис. 1.4. Нормальний розподіл випадкової величини Z.

Перевірка нульової гіпотези H_0: $\rho = 0$ зводиться до розрахунку:

$$Z_{РОЗР} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r} \tag{1.28}$$

і порівняння $|Z_{РОЗР}|$ з добутком ($Z_{ТАБ}$ { p = $1-\frac{\alpha}{2}$ } $\cdot\sigma_Z$), де $Z_{ТАБ}$ – квантиль нормованого нормального розподілу для ймовірности p = $1-\frac{\alpha}{2}$.

Якщо $|Z_{РОЗР}| \le$ ($Z_{ТАБ}$ { p = $1-\frac{\alpha}{2}$ } $\cdot\sigma_Z$), то нульову гіпотезу H_0: $\rho = 0$ (немає лінійного зв`язку) приймаємо.

Тут оцінка ступеня нелінійности зв`язку:

$$\xi_2(Z) = \frac{\left[Z_{ТАБ}\left\{p = 1-\frac{\alpha}{2}\right\}\cdot\sigma_Z\right]}{|Z_{РОЗР}|}; \tag{1.29}$$

Якщо $|Z_{РОЗР}| >$ ($Z_{ТАБ}$ { p = $1-\frac{\alpha}{2}$ } $\cdot\sigma_Z$), то нульова гіпотеза відкидається, приймається H_1: $\rho \neq 0$, щільний лінійний зв`язок коефіцієнт кореляції значущий.

Тут оцінка ступеня лінійности зв`язку:

$$\xi_1(Z) = \frac{|Z_{РОЗР}|}{\left[Z_{ТАБ}\left\{p = 1-\frac{\alpha}{2}\right\}\cdot\sigma_Z\right]} \tag{1.30}$$

Довірчі інтервали та довірча ймовірність для μ_z:

$$p\ [\ (Z_1) < \mu_z < (Z_2)\ ] = 1-\alpha\ , \tag{1.31}$$

$$\text{де } Z_1 = Z - (Z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma_Z); \tag{1.32}$$

$$Z_2 = Z + (Z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma_Z); \tag{1.33}$$

Довірчі інтервали та довірча ймовірність для ρ:

$$p\ [\ r_1 < \rho < r_2\ ] = 1-\alpha\ , \tag{1.34}$$

$$r_1 = \mathrm{th} z_1; \tag{1.35}$$

$$r_2 = \mathrm{th} z_2$$

$$tgh(z)=\frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}=\frac{\frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}}{\frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}}=\frac{\exp(z)-\exp(-z)}{\exp(z)+\exp(-z)}=\frac{\frac{\exp(z)}{\exp(-z)}-1}{\frac{\exp(z)}{\exp(-z)}+1}=$$

$$=\frac{\exp(2z)-1}{\exp(2z)+1}\ ; \tag{1.36}$$

$$r_1=thz_1=\frac{\exp(2z_1)-1}{\exp(2z_1)+1} \tag{1.37}$$

$$r_2=thz_2=\frac{\exp(2z_2)-1}{\exp(2z_2)+1} \tag{1.38}$$

5. Перевірку значущості коефіцієнта кореляції проводять за його нижньою межею довірчої ділянки для абсолютного значення коефіцієнта кореляції:

$$\mathrm{r_{КР}}\ \{\ \mathrm{p}=1-\frac{\alpha}{2}\ ;\ \mathrm{f}=N-2\} \tag{1.39}$$

Якщо $|r|\le \mathrm{r_{КР}}$, то H_0 приймається – немає значущого лінійного зв`язку.

Тут оцінка ступеня нелінійности зв`язку:

$$\xi_2(\mathrm{r})=\frac{\mathrm{r_{КР}}}{|\mathrm{r}|}\ ; \tag{1.40}$$

Якщо $|r| > \mathrm{r_{КР}}$, то H_0 відкидають – є значущий лінійний зв`язок.

Тут оцінка ступеня лінійности зв`язку:

$$\xi_1(\mathrm{r})=\frac{|\mathrm{r}|}{\mathrm{r_{КР}}}\ ; \tag{1.41}$$

За перетвореннями Фішера змінна

$$t=|r|\sqrt{\frac{N-2}{1-r^2}} \tag{1.42}$$

підпорядковується розподілу Стьюдента: тому розраховується:

$$\mathrm{t_{РОЗР}}=|\mathrm{r}|\sqrt{\frac{\mathrm{N}-2}{1-\mathrm{r}^2}} \tag{1.43}$$

і порівнюється з $\mathrm{t_{ТАБ}}$ $\{\alpha,\ \mathrm{f}=N-2\}$;

$$\frac{t_{ТАБ}}{\sqrt{N-2}} = \frac{|r|}{\sqrt{1-r^2}} \quad , \qquad (1.44)$$

звідки межа, нижче якої вже не відрізняється від $\rho = 0$.

1.4. Порівняння двох ґенеральних коефіцієнтів кореляції

1. Іноді виникає необхідність порівняти два вибіркових коефіцієнта кореляції з метою перевірки нульової гіпотези при відсутности статистичної різниці між двома генеральними коефіцієнтами кореляції ρ_1 і ρ_2, які оцінюються за двома відповідними вибірковими коефіцієнтами кореляції r_1 і r_2:

$$\begin{array}{ccc} H_0\colon \rho_1 & = & \rho_2 \\ \uparrow & & \uparrow \text{ оцінка} \\ r_1 & \neq & r_2 \end{array} \qquad (1.45)$$

2. Розраховують:

$$Z_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_1}{1-r_1}; \qquad (1.46)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_2}{1-r_2} \quad ; \qquad (1.47)$$

$$Z_{РОЗР} = \left| \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{\dfrac{1}{N_1-3} + \dfrac{1}{N_2-3}}} \right|. \qquad (1.48)$$

3. Із відповідної таблиці знаходять квантиль нормованого нормального розподілу Гауса для $p = 1 - \alpha$:

$$Z_{ТАБ}\{\ p = 1 - \frac{\alpha}{2}\ \}. \qquad (1.49)$$

4. Якщо $|Z_{РОЗР}| \le Z_{ТАБ}\ \{\ p = 1 - \frac{\alpha}{2}\ \}$, то нульова гіпотеза H_0 приймається. Цим з рівнем значущості α (для ймовірності $p = 1 - \alpha$)

стверджується, що між ρ_1 і ρ_2 немає статистичної різниці, тобто можна вважати, що вибірки взяті із загальної сукупності.

Ступінь рівности двох коефіцієнтів кореляції:

- якщо $\left|Z_{РОЗР}\right| > Z_{ТАБ}$, то

$$\xi_1(z) = \frac{Z_{ТАБ}}{\left|Z_{РОЗР}\right|}$$, то ця різниця статистично існує. (1.50)

Ступінь нерівности двох коефіцієнтів кореляції:

- якщо $\left|Z_{РОЗР}\right| \leq Z_{ТАБ}$, то

$$\xi_2(z) = \frac{\left|Z_{РОЗР}\right|}{Z_{ТАБ}}. \qquad (1.51)$$

РОЗДІЛ 2
ЛІНІЙНА МНОЖИННА КОРЕЛЯЦІЯ ТА РЕҐРЕСІЯ

2.1. Теоретична частина

1. **У випадку k-змінних рівняння множинної реґресії** у натуральній скалі має вигляд:

$$\bar{y}_1(2,3,...,i,...,k) = b_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + ... + b_ix_i + .. + b_kx_k \ , \qquad (2.1)$$

де $\bar{y}_1(2,3,...,i,...,k)$ - умовне середнє значення залежної величини y_1, яке відповідає певним значенням незалежних величин $x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_к$.

2. **Проведемо процедуру нормування**: перейдемо до нової випадкової нормалізованої змінної t_i:

$$\left.\begin{aligned} t_i &= \frac{y_j - \bar{y}_i}{S_{yi}}; \\ t_j &= \frac{x_j - \bar{x}_i}{S_{xi}} \ , \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

тоді, всі величини y_i та всі їх залежности знайдуть вираження у стандартній скалі.

3. Таким чином, **рівняння реґресії** (1) в нормованому вигляді набуде форми:

$$\bar{t}_1(2,3,...,i,...,k) = \beta_2t_2 + \beta_3t_3 + ... + \beta_it_i + .. + \beta_kt_k \ , \qquad (2.3)$$

де $\bar{t}_1(2,3,...,i,...,k)$ - умовне середнє значення нормованої (стандартної) залежної величини t_1, яке відповідає певним значенням нормованих незалежних величин $t_2, t_3, \ldots, t_i, \ldots, t_к$;

$t_2, t_3, \ldots, t_i, \ldots, t_к$ – значення нормованих (стандартних) незалежних величин $y_2, y_3, \ldots, y_i, \ldots, y_к$;

$\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_к$ – нормовані (стандартні) коефіцієнти множинної реґресії за рівнянням (2.3).

4. **Нормовані коефіцієнти множинної реґресії** визначимо за системою лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} r_{1,2}=\beta_2 r_{22}+\beta_3 r_{32}+\beta_4 r_{42}+\ldots+\beta_i r_{i2}+\ldots+\beta_k r_{k2} \\ r_{1,3}=\beta_2 r_{23}+\beta_3 r_{33}+\beta_4 r_{43}+\ldots+\beta_i r_{i3}+\ldots+\beta_k r_{k3} \\ r_{1,4}=\beta_2 r_{24}+\beta_3 r_{34}+\beta_4 r_{44}+\ldots+\beta_i r_{i4}+\ldots+\beta_k r_{k4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{1,i}=\beta_2 r_{2i}+\beta_3 r_{3i}+\beta_4 r_{4i}+\ldots+\beta_i r_{ii}+\ldots+\beta_k r_{ki} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{1,k}=\beta_2 r_{2k}+\beta_3 r_{3k}+\beta_4 r_{4k}+\ldots+\beta_i r_{ik}+\ldots+\beta_k r_{kk}, \end{array}\right\}, \qquad (2.4)$$

де r_{12}, r_{13}, r_{14},…, r_{1i},… r_{1k},…, r_{22}, r_{33}, r_{ii}, r_{32}, r_{42}, r_{23}, r_{43},…, r_{ik},…, r_{kk} – коефіцієнти парної лінійної кореляції між змінними y_1~x_2; y_1~x_3; x_2~x_3; x_2~x_4;…; x_i~x_i; x_i~$x_к$;…; $x_к$~$x_к$.

5. **Щільність зв'язку змінної** y_1 із сукупністю змінних x_2, x_3,…, x_i,…, $x_к$ у випадку лінійної множинної кореляції визначається **за коефіцієнтом множинної кореляції**:

$$r_1(2,3,\ldots,i,\ldots,k)=\sqrt{\beta_2 r_{12}+\beta_3 r_{13}+\ldots+\beta_i r_{1i}+\ldots+\beta_k r_{1k}} \qquad (2.5)$$

6. **Коефіцієнт множинної кореляції після корекції** (врахування числа коефіцієнтів рівняння (51) – числа параметрів рівняння реґресії в натуральній скалі дорівнює:

$$\bar{r}_1(2,3,\ldots,i,\ldots,k)=\sqrt{1-\left[1-r_1^2(2,3,\ldots,i,\ldots,k)\right]\cdot\left(\frac{N-1}{N-k}\right)}, \qquad (2.6)$$

де N – число спостережень;

k – число параметрів моделі (2.1).

7. **Розрахунок коефіцієнтів моделі** (2.1) в натуральній скалі:

$$b_i = \beta_1 \frac{S_{y1}}{S_i}, \text{ де i= 2, 3,…, i,…, k} \quad (2.7)$$

$$b_1 = \bar{y}_1 - \left[b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3 + \ldots + b_i\bar{x}_i + \ldots + b_k\bar{x}_k\right], \quad (2.8)$$

де $\bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots \bar{x}_i, \ldots \bar{x}_k$ - середнє значення відповідних величин.

8. Оцінка середньої квадратичної помилки розрахунку величини $\bar{y}_{1(2,3,\ldots,i,\ldots,k)}$ в рівнянні моделі (2.1) дорівнює:

$$\delta_{\sigma b} = Sy_1 \sqrt{\left[1 - \bar{r}_1^2(2,3,\ldots,i,\ldots,k)\right] \cdot \left(\frac{N-1}{N-2}\right)} \quad (2.9)$$

2.2. Числові приклади

2.2.1. Лінійна множинна кореляція та реґресія.

Приклад №1, взятий з хемічного матеріалознавства.

Середнє значення та середні квадратичні відхилення границі міцности зразків алюмінієвого стопу АМг6 (N=26 топів) та концентрації основних інґрадієнтів у цьому стопі приведені в табл. 2.1. Визначити коефіцієнти моделі (2.1) в натуральній скалі (емпіричної реґресії) для границі міцности стопу (y_1) як функції від концентрації основних інґрадієнтів : Mg (x_2), Fe (x_3), Si (x_4) та коефіцієнт множинної кореляції.

1. Значення коефіцієнтів парних кореляцій між границею міцності стопа та концентраціями первнів Mg, Fe, Si приведені в табл. 2.2 і 2.3.

2. За формулою (2.1) рівняння емпіричної реґресії в натуральній скалі для даного прикладу має вигляд:

$$\bar{y}_1(2,3,4) = b_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 \quad (2.10)$$

3. За формулою (2.3) у нормованій скалі рівняння (2.10) набуває вигляду:

$$\bar{t}_1(2,3,4) = \beta_2 t_2 + \beta_3 t_3 + \beta_4 t_4 \quad (2.11)$$

Таблиця 2.1

Статистичні характеристики границі міцности та концентрацій Mg, Fe, Si в алюмінієвому стопі АМг6

Випадкова величина	Натуральне позначення	Розмірність	Кодоване позначення	Середня	Середнє квадратичне відхилення
границя міцности	$\sigma_в$	МПа	y_1	359,7079	5,8860
концентрація Mg	C (Mg)	%	x_2	6,34	0,1136
концентрація Fe	C (Fe)	%	x_3	0,30	0,0200
концентрація Si	C (Si)	%	x_4	0,22	0,0500

4. Знайдемо коефіцієнти β_2, β_3, β_4, вирішуючи систему лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} r_{1,2} &= \beta_2 r_{22} + \beta_3 r_{32} + \beta_4 r_{42}; \\ r_{1,3} &= \beta_2 r_{23} + \beta_3 r_{33} + \beta_4 r_{43}; \end{aligned}\right\} \\ r_{1,4} = \beta_2 r_{24} + \beta_3 r_{34} + \beta_4 r_{44}. \qquad (2.12)$$

Таблиця 2.2

Матриця вибіркових коефіцієнтів парних кореляцій r_{ij}

Випадкова величина	Коефіцієнт парної кореляції			
	y_1 [$\sigma_в$]	x_2 [C (Mg)]	x_3 [C (Fe)]	x_4 [C (Si)]
y_1 [$\sigma_в$]	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}
x_2 [C (Mg)]	r_{21}	r_{22}	r_{23}	r_{24}
x_3 [C (Fe)]	r_{31}	r_{32}	r_{33}	r_{34}
x_4 [C (Si)]	r_{41}	r_{42}	r_{43}	r_{44}

Таблиця 2.3

Значення вибіркових коефіцієнтів парних кореляцій r_{ij}

між границею міцности та концентраціями Mg, Fe, Si

Випадкова величина	Коефіцієнт парної кореляції			
	y_1 [$\sigma_в$]	x_2 [C (Mg)]	x_3 [C (Fe)]	x_4 [C (Si)]
y_1 [$\sigma_в$]	1	0,5352	–0,4273	–0,2659
x_2 [C (Mg)]	0,5352	1	–0,4286	–0,6458
x_3 [C (Fe)]	–0,4273	–0,4286	1	0,6154
x_4 [C (Si)]	–0,2659	–0,6458	0,6154	1

5. Для системи лінійних рівнянь (2.12) знайдемо визначники:

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{32} & r_{42} \\ r_{23} & r_{33} & r_{43} \\ r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}4286 & -0{,}6458 \\ -0{,}4286 & 1 & 0{,}6154 \\ -0{,}6458 & 0{,}6154 & 1 \end{vmatrix} = +0{,}3611; \tag{2.13}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} r_{12} & r_{32} & r_{42} \\ r_{13} & r_{33} & r_{43} \\ r_{14} & r_{34} & r_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}5352 & -0{,}4286 & -0{,}6458 \\ -0{,}4273 & 1 & 0{,}6154 \\ -0{,}2659 & 0{,}6154 & 1 \end{vmatrix} = +0{,}2176; \tag{2.14}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{12} & r_{42} \\ r_{23} & r_{13} & r_{43} \\ r_{24} & r_{14} & r_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}5352 & -0{,}6458 \\ -0{,}4286 & -0{,}4273 & 0{,}6154 \\ -0{,}6458 & -0{,}2659 & 1 \end{vmatrix} = -0{,}1424; \tag{2.15}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{32} & r_{12} \\ r_{23} & r_{33} & r_{13} \\ r_{24} & r_{34} & r_{14} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -0{,}4286 & 0{,}5352 \\ -0{,}4286 & 1 & -0{,}4273 \\ -0{,}6458 & 0{,}6154 & -0{,}2659 \end{vmatrix} = +0{,}1320. \tag{2.16}$$

6. Тоді коефіцієнти рівняння (2.12) будуть дорівнювати:

$$\begin{cases} \beta_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta_0} = \dfrac{+0,2176}{+0,3611} = +0,6026; & (2.17) \\ \beta_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta_0} = \dfrac{-0,1424}{+0,3611} = -0,3944; & (2.18) \\ \beta_4 = \dfrac{\Delta_4}{\Delta_0} = \dfrac{+0,1320}{+0,3611} = +0,3655. & (2.19) \end{cases}$$

7. Рівняння (2.11) у нормованій скалі набуває вигляду:

$$\bar{t}_1(2,3,4) = 0,6026t_2 - 0,3944t_3 + 0,3655t_4. \quad (2.20)$$

8. Розрахунок коефіцієнтів моделі (2.10) в натуральній скалі за формулами (2.7), (2.8) привело до таких результатів:

$$b_2 = \beta_2 \frac{S_{y1}}{S_2} = 0,6026 \frac{5,8860}{0,1136} = 31,2227; \quad (2.21)$$

$$b_3 = \beta_3 \frac{S_{y1}}{S_3} = (-0,3944) \frac{5,8860}{0,0200} = -116,0719; \quad (2.22)$$

$$b_4 = \beta_4 \frac{S_{y1}}{S_4} = 0,3655 \frac{5,8860}{0,0500} = 43,0267; \quad (2.23)$$

$$b_1 = \bar{y}_1 - \left[b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3 + b_4\bar{x}_4\right] = 359,7079 - \left[31,2227 \cdot 6,34 - 116,0719 \cdot 0,30 + 43,0267 \cdot 0,22\right] = \\ = 359,7079 - [197,9519 - 34,8216 + 9,4659] = 359,7079 - 172,5962 = 187,1117$$

(2.24)

9. Рівняння залежности границі міцности алюмінієвого стопу АМг6 від концентрації основних компонентів має вигляд у натуральній скалі::

$$\sigma_в = 187,1117 + 31,2227 \cdot C(Mg) - 116,0719 \cdot C(Fe) + 43,0267 \cdot C(Si) \quad (2.25)$$

10. За формулою (1.5) множинний коефіцієнт кореляції:

$$r_1(2,3,4) = \sqrt{\beta_2 r_{12} + \beta_3 r_{13} + \beta_4 r_{14}} = \sqrt{0,6026 \cdot 0,5352 + (-0,3944) \cdot (-0,4273) + 0,3655 \cdot (-0,2659)} = \\ = 0,62758$$

(2.26)

11. Коефіцієнт множинної кореляції після корекції – врахування числа параметрів рівняння (2.10) k=4; числа експериментів N=26 – за рівнянням (2.6):

$$\bar{r}_1(2{,}3{,}4)=\sqrt{1-\left[1-r^2_{1(2,3,4)}\right]\cdot\left(\frac{N-1}{N-k}\right)}=\sqrt{1-\left[1-0{,}62758^2\right]\cdot\left(\frac{26-1}{26-4}\right)}=0{,}55785 \qquad (2.27)$$

12. Оцінка середньої квадратичної помилки розрахунку границі міцности зразка алюмінієвого стопу за рівнянням моделі (2.1) в натуральній скалі становить за (2.9):

$$\delta_{\sigma_в}=S_{y1}\sqrt{\left[1-\bar{r}^2_{1(2,3,4)}\right]\cdot\left(\frac{N-1}{N-2}\right)}=5{,}8860\sqrt{\left[1-0{,}55785^2\right]\cdot\left(\frac{26-1}{26-2}\right)}=4{,}9858\text{МПа} \qquad (2.28)$$

Таблиця 2.4

Підсумкова матриця значень множинних коефіцієнтів кореляцій та перевірки їх значущості за критеріями $r_{кр}$, t-Стьюдента та F-перетворення Фішера (Z)

За критерієм	До корекції		Після корекції	
	$r_1(2,3,4)=0,62758$		$\bar{r}_1(2,3,4)=0,55785$	
$r_{кр}$	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01
Ступінь лінійности	1,6166	1,2658	1,4370	1,1252
Ступінь нелінійности	0,6186	0,7900	0,6959	0,8888
t	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01
Ступінь лінійности	2,4575	1,8135	1,5954	1,1773
Ступінь нелінійности	0,4069	0,5514	0,6268	0,8494
F-перетворенням (Z)	α=0,05	α=0,01	α=0,05	α=0,01
Ступінь лінійности	1,8045	1,3708	1,5409	1,1706
Ступінь нелінійности	0,5542	0,7295	0,6490	0,8543

13. Висунемо нульову гіпотезу H_0 відносно ґенерального множинного коефіцієнта кореляції $\rho_1(2,3,4)$, оцінкою якого є вибірковий множинний коефіцієнт $r_1(2,3,4)$, , кореляції, розрахований за формулою (1.5):

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \underset{\uparrow}{\rho_{1(2,3,4)}} = 0 \\ r_{1(2,3,4)} \neq 0 \end{array}\right\} \qquad (2.29)$$

14. Перевірка нульової гіпотези H_0 (2.29):

1) **за критичним значенням коефіцієнта кореляції**:

- для α=0,05 $|r_{1(2,3,4)}|$=0,62758>$r_{кр.}$ {q=1-0,05/2=0,975; f=N-2=24}=0,3882; (2.30)
- для α=0,01 $|r_{1(2,3,4)}|$=0,62758>$r_{кр.}$ {q=1-0,01/2=0,995; f=N-2=24}=0,4958. (2.31)

З ймовірностями р=0,95 та р=0,99 при рівнях значущости α=0,05 та α=0,01 нульова гіпотеза відкидається, тобто стверджуємо, що за $r_{кр.}$ між границею міцности стопу АМг6 та концентраціями основних компонентів C(Mg), C(Fe) та C(Si) існує статистично щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности множинного зв’язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_1(r)_{0,05} = \dfrac{|r_{1(2,3,4)}|}{r_{кр}(\alpha = 0,05)} = \dfrac{0,62758}{0,3882} = 1,6166$; (2.32)
- для α=0,01 $\xi_1(r)_{0,01} = \dfrac{|r_{1(2,3,4)}|}{r_{кр}(\alpha = 0,01)} = \dfrac{0,62758}{0,4958} = 1,2658$; (2.33)

а **ступінь нелінійности множинного зв’язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(r)_{0,05} = \dfrac{r_{кр}(\alpha = 0,05)}{|r_{1(2,3,4)}|} = \dfrac{0,3882}{0,62758} = 0,6186$; (2.34)
- для α=0,01 $\xi_2(r)_{0,01} = \dfrac{r_{кр}(\alpha = 0,01)}{|r_{1(2,3,4)}|} = \dfrac{0,4958}{0,62758} = 0,7900$; (2.35)

2) **за критерієм Стьюдента**:

- для α=0,05 $|t_p| = \dfrac{|r_{1(2,3,4)}|}{\sqrt{1-r_{1(2,3,4)}^2}}\sqrt{N-2} = \dfrac{0,62758}{\sqrt{1-0,62758^2}}\sqrt{26-2} = 5,07224>$

>$t_т$ {q=1-0,05/2=0,975; f=N-2=26-2=24}=2,064 [11]; (2.36)

- для α=0,01 $\left|t_p\right| = 5{,}07224$ >$t_т$ {q=1-0,01/2=0,995; f=24}=2,797 [11]. (2.37)

З ймовірностями р=0,95 та р=0,99 при рівнях значущости α=0,05 та α=0,01 нульова гіпотеза H_0 відкидається, тобто стверджуємо, що за t-критерієм між границею міцности стопу АМг6 та концентраціями основних компонентів C(Mg), C(Fe) та C(Si) існує статистично щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности множинного зв’язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_1(t)_{0,05} = \dfrac{\left|t_p\right|}{t_т(\alpha = 0{,}05)} = \dfrac{5{,}07224}{2{,}064} = 2{,}4575$; (2.38)

- для α=0,01 $\xi_1(t)_{0,01} = \dfrac{\left|t_p\right|}{t_т(\alpha = 0{,}01)} = \dfrac{5{,}07224}{2{,}797} = 1{,}8135$; (2.39)

а **ступінь нелінійности множинного зв’язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(t)_{0,05} = \dfrac{t_т(\alpha = 0{,}05)}{\left|t_p\right|} = \dfrac{2{,}064}{5{,}07224} = 0{,}4069$; (2.40)

- для α=0,01 $\xi_2(t)_{0,01} = \dfrac{t_т(\alpha = 0{,}01)}{\left|t_p\right|} = 0{,}5514$. (2.41)

3) **За Z-перетворенням Фішера:**

- для α=0,05 $\left|z_p\right| = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+r_{1(2,3,4)}}{1-r_{1(2,3,4)}} = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+0{,}62758}{1-0{,}62758} = 0{,}73741$>

>[($z_т$ {q=1-α/2=1-0,05/2=0,975}=1,96)·(σ_Z= $\dfrac{1}{\sqrt{N-3}} = \dfrac{1}{\sqrt{26-3}} = 0{,}2085$)=0,40866];

(2.42)

- для α=0,01 $\left|z_p\right| = 0{,}73741$ >[($z_т$ {q=0,995}=2,58)·(σ_Z=0,2085)=0,53793].

(2.43)

З ймовірностями р=0,95 та р=0,99 при рівнях значущости α=0,05 та α=0,01 нульова гіпотеза H_0 відкидається, тобто стверджуємо, що за Z-перетворенням Фішера між границею міцности стопу АМг6 та концентраціями основних компонентів C(Mg), C(Fe) та C(Si) існує статистично щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности множинного зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_1(z)_{0,05} = \frac{|z_p|}{[z_т(q=0,975)\cdot\sigma_z]} = \frac{0,73741}{0,40866} = 1,8045;$ (2.44)

- для α=0,01 $\xi_1(z)_{0,01} = \frac{|z_p|}{[z_т(q=0,995)\cdot\sigma_z]} = \frac{0,73741}{0,53793} = 1,3708;$ (2.45)

а **ступінь нелінійности множинного зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(z)_{0,05} = \frac{[z_т(q=0,975)\cdot\sigma_z]}{|z_p|} = \frac{0,40866}{0,73741} = 0,5542;$ (2.46)

- для α=0,01 $\xi_2(z)_{0,01} = \frac{[z_т(q=0,995)\cdot\sigma_z]}{|z_p|} = \frac{0,53793}{0,73741} = 0,7295.$ (2.47)

15. **Висунемо нульову гіпотезу H_0 відносно ґенерального** множинного коефіцієнта кореляції $\bar{\rho}_{1(2,3,4)}$, оцінкою якого є вибірковий множинний коефіцієнт кореляції $r_1(2,3,4)$, підданий **корекції** – врахування числа параметрів рівняння (60): k=4; N=26 – за рівнянням (2.6):

$$\left.\begin{array}{l} H_0': \bar{\rho}_{1(2,3,4)} = 0 \\ \quad\uparrow \\ \bar{r}_{1(2,3,4)} \neq 0 \end{array}\right\} \qquad (2.48)$$

16. Перевірка нульової гіпотези H_0' (2.48) аналогічно (2.14):

1) **за критичним значенням коефіцієнта кореляції**:

- для α=0,05 $|\bar{r}_{1(2,3,4)}|$=0,55785>$r_{кр.}$ {q=0,975; f=24}=0,3882;

(2.49)

- для α=0,01 $|\bar{r}_{1(2,3,4)}|$=0,55785>$r_{кр.}$ {q=0,995; f=24}=0,4958.

(2.50)

З ймовірностями p=0,95 та p=0,99 H_0' відкидається, тобто стверджуємо, що за $r_{кр.}$ між $\sigma_в$ та концентраціями основних компонентів C(Mg), C(Fe) та C(Si) існує щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_1(\bar{r})_{0,05} = \dfrac{\left|\bar{r}_{1(2,3,4)}\right|}{r_{кр}(\alpha = 0,05)} = \dfrac{0,55785}{0,3882} = 1,4370$; (2.51)
- для α=0,01 $\xi_1(\bar{r})_{0,01} = \dfrac{\left|\bar{r}_{1(2,3,4)}\right|}{r_{кр}(\alpha = 0,01)} = \dfrac{0,55785}{0,4958} = 1,1252$. (2.52)

а **ступінь нелінійности множинного зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(\bar{r})_{0,05} = \dfrac{r_{кр}(\alpha = 0,05)}{\left|\bar{r}_{1(2,3,4)}\right|} = \dfrac{0,3882}{0,55785} = 0,6959$; (2.53)
- для α=0,01 $\xi_2(\bar{r})_{0,01} = \dfrac{r_{кр}(\alpha = 0,01)}{\left|\bar{r}_{1(2,3,4)}\right|} = \dfrac{0,4958}{0,55785} = 0,8888$; (2.54)

2) **за критерієм Стьюдента**:

- для α=0,05 $\left|t_p\right| = \dfrac{\left|\bar{r}_1(2,3,4)\right|}{\sqrt{1-\bar{r}_1^2(2,3,4)}}\sqrt{N-2} = \dfrac{0,55785}{\sqrt{1-0,55785^2}}\sqrt{26-2} = 3,29288 >$

  $> t_т$ {q=0,975; f=24}=2,064 [11]; (2.55)
- для α=0,01 $\left|t_p\right| = 3,29288 > t_т$ {q=0,995; f=24}=2,797. (2.56)

З ймовірностями p=0,95 та p=0,99 H_0' відкидається, тобто стверджуємо, що за t-критерієм між $\sigma_в$ та концентраціями основних компонентів C(Mg), C(Fe) та C(Si) існує щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности зв'язку**:

- для α=0,05 $\xi_1(t)_{0,05} = \dfrac{\left|t_p\right|}{t_т(\alpha = 0,05)} = \dfrac{3,29288}{2,064} = 1,5954$; (2.57)
- для α=0,01 $\xi_1(t)_{0,01} = \dfrac{\left|t_p\right|}{t_т(\alpha = 0,01)} = \dfrac{3,29288}{2,797} = 1,1773$; (2.58)

а **ступінь нелінійности множинного зв'язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(t)_{0,05} = \dfrac{t_т(\alpha = 0,05)}{\left|t_p\right|} = \dfrac{2,064}{3,29288} = 0,6268$; (2.59)
- для α=0,01 $\xi_2(t)_{0,01} = \dfrac{t_т(\alpha = 0,01)}{\left|t_p\right|} = \dfrac{2,797}{3,29288} = 0,8494$. (2.60)

3) **За Z-перетворенням Фішера:**

- для α=0,05 $\left|z_p\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\bar{r}_{1(2,3,4)}}{1-\bar{r}_{1(2,3,4)}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0,55785}{1-0,55785} = 0,62971>$

  $>[(z_т\ \{q=0,975\}=1,96)^{\cdot}(\sigma_z=0,2085)=0,40866]$ [11]; (2.61)

- для α=0,01 $\left|z_p\right| = 0,62971 >[(z_т\ \{q=0,995\}=2,58)^{\cdot}(\sigma_z=0,2085)=0,53793]$.

  (2.62)

З ймовірностями p=0,95 та p=0,99 H_0' відкидається, тобто стверджуємо, що за Z-перетворенням Фішера між $\sigma_в$ та концентраціями основних компонентів C(Mg), C(Fe) та C(Si) існує щільний множинний лінійний зв'язок, при цьому **ступінь лінійности зв’язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_1(z)_{0,05} = \frac{\left|z_p\right|}{[z_т(q=0,975)\cdot\sigma_z]} = \frac{0,62971}{0,40866} = 1,5409$; (2.63)

- для α=0,01 $\xi_1(z)_{0,01} = \frac{\left|z_p\right|}{[z_т(q=0,995)\cdot\sigma_z]} = \frac{0,62971}{0,53793} = 1,1706$; (2.64)

а **ступінь нелінійности множинного зв’язку** дорівнює:

- для α=0,05 $\xi_2(z)_{0,05} = \frac{[z_т(q=0,975)\cdot\sigma_z]}{\left|z_p\right|} = \frac{0,40866}{0,62971} = 0,6490$; (2.65)

- для α=0,01 $\xi_2(z)_{0,01} = \frac{[z_т(q=0,995)\cdot\sigma_z]}{\left|z_p\right|} = \frac{0,53793}{0,62971} = 0,8543$. (2.66)

2.2.2. Лінійна кореляція між двома величинами

Приклад №2 взятий з медичної хімії

1. Експериментальна частина

1.1. Об’єкт дослідження: хворий С. мав такі дані на 4.07.2010 р.: стать – чол.; вік 69 років; зріст 169 см; ваґа 94,4 кг; BF (відсоток жиру) = 31,9 %; BW (відсоток гідратації) = 46,8 %; останні параметри в N. для віку більше тридцяти років: BF = 19,6 – 24,0%; BW = 55,2 – 52,3%; оцінка «товстий»: BF = 28,6 – 45%; BW = 49,9 – 37,8%.

06.08.2010 р. проведені контрольні вимірювання:

- натще, до навантаження (8:00 год. ранку), вміст глюкози у плазмі крові Hb_0'= 6,7 ммоль/л; вміст глюкози у цільній крові Hb_0=6,0 ммоль/л; артеріяльний тиск p=126/72 мм Hg; частота пульса N_0 = 73 пошт./хв.;
- після навантаження натще (3000 рухів + 500 м бігу + 150 сходинок вгору на 9 поверх; через 1 хв. відпочинку, 9:45 год.): Hb_1'=6,0 ммоль/л; Hb_1 = 5,3 ммоль/л; p_1 = 169/76 мм Hg; N_0 = 130 пошт./хв.;
- після сніданку, обіду о 20:00 год.: Hb_2' = 11,8 ммоль/л; Hb_2 = 10,5 ммоль/л; p_2 = 141/75 мм Hg; N_0 = 87 пошт./хв.

Мета роботи полягала в проведенні статистичної обробки експериментальних результатів визначення рівня глюкози в крові, артеріяльного тиску та пульсу хворого С. , отриманих на різних прикладах.

1.2. Прилади та методи дослідження.

• Технічні характеристики приладів, які використані до 12.07.2010 р.

1.2.1. Тонометр для вимірювання артеріяльного тиску і частоти пульсу UA–705 напівавтоматичний («A and D» Company Ltd., Tokyo, Japan, “AD” Com. Ltd.) (табл. 2.5).

• Технічні характеристики приладів, які використані після 12.07.2010 р.

1.2.2. Тонометр для вимірювання артеріяльного тиску і частоти пульсу цифровий LD автоматичний («Little Doctor” LD6 Int. (S) Pte. Ltd., Shanghal Int. Trading Corp. GmbH, Hamburg, Germany):

- Модель: LD – N057.
- Стабілізоване джерело електроживлення: AC/DC Adapter.
- Метод вимірювань: осцилометричний.

- Індикатор: рідкокристалічний чотири стрічковий.
- Діапазон вимірювань: Δp = 40 – 260 мм.рт.ст. (тиск); ΔN = 40 – 160 пошт./хв. (частота пульсу). Індикація аритмії.
- Пам'ять: 2 блока пам'яти по 6 комірок кожний, 2×6 вимірювань + середнє значення трьох останніх вимірювань.
- Похибка вимірювань:
- $\Sigma(\Delta p) = \pm 3$мм.рт.ст. (тиск); $\Sigma(\Delta N) = 5\%$ від показників (частота пульсу).
- Нагнітання та скидання тиску: автоматичне.
- Є час і дата вимірювання.
- Максимальна споживча потужність: 3,6 Вт.
- Електроживлення: 4 елемента живлення АА×1,5 В (LR6); або джерело електроживлення (6В; 600мА).
- Умови експлуатації:

  а) температура: +10…+40ºС;

  б) відносна вологість: ≤85%.
- Умови зберігання та транспортування:

  а) температура: –20…+50ºС;

  б) відносна вологість: ≤85%.
- Термін роботи:

  а) приладу зі джерелом електроживлення: 7 років;

  б) манжети: 3 роки.

1.2.3. Прилад для визначення вмісту глюкози у цільній капілярній та в плазмі крові «Accu-Chek Active» фірми «Roche Diagnostics» Компанії ґрупи «Hoffmann-La Roche Ltd.»:

- Принцип контролі: рефлексійний фотометричний свіжої капілярної крові, автоматичний.
- Діапазон контролі: 0,6 – 33,3 ммоль/л.

- Час вимірювання: 5 с (при нанесенні крові на тест-смужку, що встановлена в приладі).
- Мінімальний об’єм капілярної краплі крові: 2 мкл.
- Об’єм пам’яті: 200 значень рівня глюкози (+час і дата) за останні 7 або 14 днів.
- Дисплей: рідкокристалічний, 90 сеґментів.
- Можливість нанесення краплі крові на тест-смужку в приладі та поза приладом.
- Кодування за допомогою кодової платівки тест-смужки.
- Візуальний контроль на екрані після проведення аналізи.
- Можливість розрахунку середнього значення і рівня глюкози за останні 7 та 14 днів.
- Можливість бездротової передачі даних у персональний комп’ютер через інфрачервоний портал.
- Зміна тест-смужок дозволяє визначити рівень глюкози в капілярній крові або плазмі крові (в першій Hb менше, ніж у другій на 11 – 12%).
- Умови експлуатації:

  а) температура: +10…+40ºC; (+5…+45ºC з меншою точністю).

  б) відносна вологість: ≤85%.
- Умови зберігання та транспортування:

  а) температура: –40…+70ºC;

  б) відносна вологість: ≤85%.
- Автоматичне відключення через 1-2 хв. після останнього натискання на пипку.
- Живлення: 1 літієва батарейка типу CR2032.
- Термін роботи: 1000 контролів-батарейки вимірювань протягом 1 року.

Таблиця 2.5

Технічні характеристики тонометра для вимірювання артеріяльного тиску UA-705

<table>
<tr><td colspan="2">Метод вимірювання</td><td>Осцилометричний</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Межі вимірювань</td><td>20 – 280 мм.рт.ст. (тиск)</td></tr>
<tr><td>40 – 200 пошт./хв.(пульс)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Похибка вимірювань</td><td rowspan="2">Тиск</td><td>≤3 мм.рт.ст. у діапазоні 40 – 150 мм.рт.ст.</td></tr>
<tr><td>≤2% в діапазоні 150 – 280 мм.рт.ст</td></tr>
<tr><td>Пульс</td><td>≤5% від показників</td></tr>
<tr><td colspan="2">Інтервал min тиску</td><td>1 мм.рт.ст</td></tr>
<tr><td colspan="2">Спосіб помпування манжети</td><td>Ручний з допомогою помпи</td></tr>
<tr><td colspan="2">Спосіб випускання повітря з манжети</td><td>Автоматичний</td></tr>
<tr><td colspan="2">Джерело живлення</td><td>1 елемент типу АА, R6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Тривалість роботи від елемента живлення</td><td>2000 вимірювань</td></tr>
<tr><td>Умови</td><td>експлуатації</td><td>зберігання та транспортування</td></tr>
<tr><td>Температура</td><td>+10º…+40ºC</td><td>-10º…+60ºC</td></tr>
<tr><td>Вологість</td><td>≤85%</td><td>≤85%</td></tr>
</table>

1.3. Статистична аналіза результатів дослідження.

1. Розраховували такі вибіркові числові (точкові) характеристики:

• **вибіркова середня (середня арифметична)** $\overline{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \text{ [од.]}, \tag{2.67}$$

де N – кількість елементарних комірок;

x_i – кількість особин в і-й комірці;

$\sum_{i=1}^{N} x_i$ – кількість особин в N- комірках;

• **вибіркова дисперсія S^2**:

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N(\bar{x})^2\right] \text{[од.}^2\text{]}; \tag{2.68}$$

• **вибіркове середнє квадратичне відхилення S**:

$$S = +\sqrt{S^2} \text{ [од.]}; \tag{2.69}$$

• **вибірковий коефіцієнт варіації γ**:

$$\gamma = \frac{S}{\bar{x}} \left[\text{безрозм.}\right]; \left(\frac{S}{\bar{x}} 100, \%\right); \tag{2.70}$$

• **вибірковий показник ступеня просторової аґреґації ξ**:

$$\xi = \frac{S^2}{\bar{x}} \left[\text{од.}\right]. \tag{2.71}$$

2. Узагальнені (степеневі) вибіркові характеристики:

• **вибірковий начальний момент k-го порядку** – узагальнена вибіркова середня $\mathbf{h_k}$:

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^k , \tag{2.72}$$

де k = 1, 2, 3, 4;

h_1 [од.]; h_2 [од.^{2}]; h_3 [од.^{3}]; h_4 [од.^{4}] – вибіркові начальні моменти 1-го, 2-го, 3-го, 4-го порядку відповідно;

• **вибірковий центральний момент k-го поряд ку** – узагальнене вибіркове розсіяння $\mathbf{m_k}$:

$$m_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}\right)^k , \tag{2.73}$$

де k= 1, 2, 3, 4;

m_1 [од.]; m_2 [од.^{2}]; m_3 [од.^{3}]; m_4 [од.^{4}] – вибіркові центральні моменти 1-го, 2-го, 3-го та 4-го порядку відповідно, а також за формулами [1]:

$$m_1=h_1 - h_1; \tag{2.74}$$

$$m_2=h_2 - h_1^2; \tag{2.75}$$

$$m_3=h_3 - 3h_2h_1 +2 h_1^3; \tag{2.76}$$

$$m_4=h_4 - 4h_3h_1 +6h_2h_1^2 - 3h_1^4. \tag{2.77}$$

3. Вибірковий показник асиметрії розподілу as:

$$as = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \left[\text{безрозм.}\right]; \tag{2.78}$$

його вибірковий нормований коефіцієнт розподілу $\mathbf{\beta_1}$:

$$\beta_1 = \frac{m_3^2}{m_2^3} \; [\text{безрозм.}], \tag{2.79}$$

та середнє квадратичне відхилення $\mathbf{S_{as}}$:

$$S_{as} = \sqrt{\frac{6(N-1)}{(N+1)(N+3)}} \, . \tag{2.80}$$

4. Вибірковий показник ексцесу (стрімкости) розподілу ex:

$$ex = \frac{m_4}{m_2^2} - 3, \; [\text{безрозм.}]; \tag{2.81}$$

його вибірковий нормований коефіцієнт $\mathbf{\beta_2}$:

$$\beta = \frac{m_4}{m_2^2}, \; [\text{безрозм.}]; \tag{2.82}$$

та його середнє квадратичне відхилення $\mathbf{S_{ex}}$:

$$S_{ex} = \sqrt{\frac{24(N-2)(N-3)N}{(N-1)^2 (N+3)(N+5)}} \, . \tag{2.83}$$

5. Перевірку підпорядкування емпіричних даних нормальному закону розподілу Ґаусса за критерієм $\boldsymbol{\omega^2}$ (в умовах N<100) здійснювали, розраховуючи:

$$\left(N\omega^2\right)_p = \frac{1}{12N} + \sum_{i=1}^{N}\left[P(x_i) - w(x_i)\right]^2 , \tag{2.84}$$

де p (x_i) = 0,5 + Φ (z_i) – теоретична ймовірність попадання випадкової величини X(Z) на *i*-місце варіяційного ряду;

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S};$$

$w(x_i) = \dfrac{i-0{,}5}{N}$ – емпірична функція розподілу (накопичена частота – частота попадання $\mathbf{x}_i$ на *i*-місце у варіяційному ряді):

$$\Phi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \left(-\frac{z^2}{2} \right) dz \; . \qquad (2.85)$$

За нерівністю $\left(N\omega^2\right)_p \leq Z_\alpha(\alpha)$ визначали рівень значущости прийняття гіпотези про підпорядкування емпіричних даних нормальному закону розподілу Ґаусса.

Для визначення максимального рівня значущости $\boldsymbol{\alpha_{max}}$ цього підпорядкування за табличними даними побудували залежність $Z_\alpha=f(\ln\alpha)$ (рис. 5), що дозволило за співвідношенням $Z_\alpha/(N\omega^2)_p=1$ для умов $Z_\alpha=(N\omega^2)_p$, знайти $\boldsymbol{\alpha_{max}}$, використовуючи апроксимуючий поліном з високим рівнем апроксимації: $Z_\alpha=-0{,}1672\ln\alpha-0{,}0197$ ($R^2=0{,}9971$).

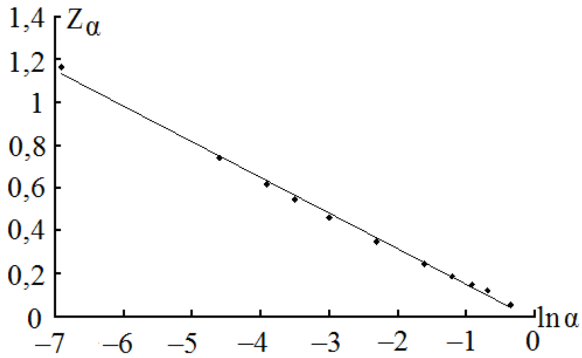


Рис. 2.1. Залежність кри ичного значення $\omega^2_{кр.}=Z_\alpha$ від логарифму рівня значущости α.

6. Розраховували ступінь статистичної відповідности (невідповідности) емпіричного розподілу експериментальних даних теоретичному розподілу нормального закону Ґаусса за критерієм $\boldsymbol{\omega^2}$:

$$\xi_1(\omega) = \frac{Z_\alpha}{\left(N\omega^2\right)_p}, \qquad (2.86)$$

де, ступінь невідповідности $\xi_2(\omega) = \dfrac{\left(\mathrm{N}\omega^2\right)_p}{Z_\alpha}$, де $Z_\alpha = \omega^2_{кр.}$ – критичне значення критерію $\boldsymbol{\omega}^2$ для рівня значущости (α =0,01 та α =0,05).

4. Кореляційна аналіза.

1. Вибірковий коефіцієнт кореляції **r** між випадковими величинами **x** і **y** розраховували за:

$$r = \frac{m_{1/1}}{S_x \cdot S_y}, \tag{2.87}$$

де,

$$m_{1/1} = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\right] = \frac{1}{k-1}\left[\sum_{i=1}^{k}(x_i y_i) - k\bar{x}\,\bar{y}\right] \tag{2.88}$$

вибірковий змішаний центральний момент другого порядку;

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{k-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^2\right) - k\bar{x}^2\right]} \tag{2.89}$$

вибіркове середнє квадратичне відхилення для випадкової величини **x**;

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{k-1}\left[\sum_{i=1}^{k}\left(y_i^2\right) - k\bar{y}^2\right]} \tag{2.90}$$

вибіркове середнє квадратичне відхилення для випадкової величини **y**.

У кінцевому вигляді формула для розрахунку вибіркового коефіцієнта кореляції набула вигляду:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i y_i) - k\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^2\right) - k\bar{x}^2\right]\left[\sum_{i=1}^{k}\left(y_i^2\right) - k\bar{y}^2\right]}}. \tag{2.91}$$

Для перевірки нульової гіпотези $\mathbf{H_0}$: $\rho = 0$ (рівности нулю ґенерального коефіцієнта кореляції) за оцінкою вибіркового (розрахованого) коефіцієнта кореляції $\mathbf{r_p}$ використали перетворення Фішера **z**, критерій Стьюдента **t**, критичне значення коефіцієнта кореляції $\mathbf{r_{кр}}$.

Розраховували ступінь сили лінійности кореляційного зв'язку $\xi_1(z)$, $\xi_1(t)$, $\xi_1(r)$, ступеня сили нелінійности кореляційного зв'язку $\xi_2(z)$, $\xi_2(t)$, $\xi_2(r)$ та ступеня сумарної сили лінійности + нелінійности кореляційного зв'язку: $\xi_{12}(z)= \xi_1(z)+ \xi_2(z)$; $\xi_{12}(t)= \xi_1(t) + \xi_2(t)$; $\xi_{12}(r)= \xi_1(r) + \xi_2(r)$.

Процедура прийняття (немає статистично надійного лінійного зв'язку) або відкидання (є статистично надійний лінійний зв'язок) нульової гіпотези $\mathbf{H_0}$ здійснювали для двох ступенів значущости α=0,05 та α=0,01 [10–14]:

• **за критичним коефіцієнтом кореляції $\mathbf{r_{кр}}$** {q=1-α/2; f=k-2}, приймаючи $\mathbf{H_0}$: ρ=0 (відсутній надійний лінійний зв'язок) з ймовірністю правдивости її прийняття p=(1–α) та рівнем значущости α =(1–p) – ймовірности (ризику) прийняти неправдиву гіпотезу $\mathbf{H_0}$, якщо $|r_p| \le r_{кр}$ (немає надійного лінійного зв'язку), або відкидаючи $\mathbf{H_0}$ (є надійний лінійний зв'язок) з ймовірністю правдивости p=(1–α). Відкидання $\mathbf{H_0}$: ρ=0 з рівнем значущости α =(1–p) є ризик відкинути правдиву гіпотезу $\mathbf{H_0}$: ρ=0, якщо $|r_p| > r_{кр}$.

При цьому ступінь лінійности $\xi_1(r)$ та ступінь нелінійности $\xi_2(r)$ кореляційного зв'язку за $\mathbf{r_{кр}}$:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1(r) &= \frac{|r_p|}{r_{кр}}; \\ \xi_2(r) &= \frac{r_{кр}}{|r_p|}; \end{aligned}\right\} \tag{2.92}$$

та ступінь сумарного (лінійного+нелінійного) кореляційного зв'язку за $\mathbf{r_{кр}}$: $\xi_{12}(r)= \xi_1(r) + \xi_2(r)$.

• **за критерієм Стьюдента**: $\mathbf{t_T}${q=1-α/2; f=k-2}, розраховуючи за вибірковим коефіцієнтом кореляції:

$$\mathrm{t_P} = \frac{r_p}{\sqrt{1-r_p^{\,2}}}\sqrt{k-2} \qquad (2.93)$$

та приймаючи **H₀**: ρ = 0 (відсутній надійний лінійний зв'язок) з ймовірністю правдивости її прийняття p=(1–α) та рівнем значущости α =(1–p) є ризик прийняти неправдиву гіпотезу **H_0**: ρ = 0, якщо $|t_P| \le t_T$ (немає надійного лінійного зв'язку), або відкидаючи **H_0** (є надійний лінійний зв'язок) з ймовірністю p=(1–α). Правдивість відкидання **H_0**: ρ = 0 з рівнем значущости α =(1–p) є ризик відкинути правдиву гіпотезу **H_0**: ρ = 0, якщо $|t_P| > t_T$ (є надійний лінійний зв'язок).

При цьому ступінь лінійности зв'язку кореляційного зв'язку за t-критерієм: $\xi_1(t) = \frac{|t_p|}{t_T}$, а ступінь нелінійности за t-критерієм:

$$\xi_2(t) = \frac{t_T}{|t_p|} \qquad (2.94)$$

та ступінь сумарного (лінійного+нелінійного) кореляційного зв'язку за t-критерієм: $\xi_{12}(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$.

• **за Z-перетворенням Фішера**, розраховуючи:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{z_p} &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_p}{1-r_p}\,; \\ \sigma_z &= \frac{1}{\sqrt{k-3}}\,;\ (z_T \cdot \sigma_z) \end{aligned}\right\}, \qquad (2.95)$$

де $z_T\{q = 1-\alpha/2\}$ – квантиль нормованого нормального розподілу та приймаючи **H_0**: ρ = 0 (відсутній надійний лінійний зв'язок) з ймовірністю правдивости її прийняття p=(1–α) та рівнем значущости α =(1–p) є ризик прийняти неправдиву гіпотезу **H_0**: ρ=0, якщо $|\mathrm{z_p}| \le (\mathrm{z_T} \cdot \sigma_z)$ (немає надійного лінійного зв'язку), або відкидаючи її (є надійний лінійний зв'язок) з ймовірністю p=(1–α). Правдивість відкидання **H_0**: ρ=0 з рівнем значущости α =(1–p) є ризик відкинути правдиву гіпотезу **H_0**: ρ=0, якщо $|\mathrm{z_p}| > (\mathrm{z_T} \cdot \sigma_z)$.

При цьому ступінь лінійности зв’язку кореляційного зв’язку за z-функцією:

$$\xi_1(z) = \frac{|Z_p|}{(Z_T \cdot \sigma_z)}, \tag{2.96}$$

а ступінь нелінійности кореляційного зв’язку за z-функцією:

$$\xi_2(z) = \frac{(Z_T \cdot \sigma_z)}{|Z_p|} \tag{2.97}$$

та ступінь сумарного (лінійного+нелінійного) кореляційного зв’язку за z-функцією:

$$\xi_{12}(z) = \xi_1(z) + \xi_2(z). \tag{2.98}$$

2. Результати та статистична аналіза

1. Результати дослідження рівня глюкози в капілярній крові Hb, у плазмі крові Hb', тиску P_{max} і P_{min}, пульсу N за 12-ма рівноточними вимірюваннями натщесерце з 7:00 до 8:00 год. ранку 19.08.2010 р. (тиск, пульс) та з 7:30 до 8:30 год. ранку 21.08.2010 р. (концентрація глюкози в цільній плазмі крові) хворого С. на цукровий діабет та статистична обробка даних представлені в табл. 6. Як видно з табл. 6, результати досліджень підпорядковані н.з.р. Ґаусса з рівнем значущости α (%): 72,638 (тиск max); 51,843 (тиск min); 56,436 (пульс); 39,610 (Hb'); 39,612 (Hb). Порівняні результати паралельних досліджень рівня глюкози 9 ммоль/л) на аналізаторі АГКМ-01, приладі «Accu-Chek Activ» №1, аналізаторі КФК-3 та приладі «Accu-Chek Activ» № 2 представлені в табл. 7.

2. Як видно з табл.7, середній рівень глюкози в крові в 4-х порівняльних дослідах коливався в межах від 5,67 до 6, 97 ммоль/л, а дисперсія – від 0,0757 до 0,4996, середнє квадратичне відхилення – від 0,02751 до 0,7068, коефіцієнт варіяції – від 3,95 до 10,68%.

1. Перевірка підпорядкування емпіричних результатів теоретичному нормальному закону розподілу Ґаусса (н.з.р.) за показником асиметрії і ексцесу показала:

• **для аналізатора АГКМ-01:**

$$|as| = 0{,}2806 < S_{as} = 0{,}6145;$$

$$|ex| = 0{,}8 < S_{ex} = 0{,}9224,$$

що достатньо для прийняття нульової гіпотези $\mathbf{H_o}$ про підпорядкування результатів н.з.р. Додатковим підтвердженням є розрахований α_{max}=59,75%;

• **для паралельних досліджень на глюкометрі Accu-chek active № 1:**

$$|as| = 0{,}61581 \geq S_{as} = 0{,}6145;$$

$$|ex| = 0{,}10881 < S_{ex} = 0{,}9224.$$

У зв'язку з тим, що $|as|=0{,}61581<3S_{as}=1{,}84353$, то є необхідність перевірити $\mathbf{H_o}$ про підпорядкування результатів дослідження теоретичному н.з.р. за критерієм ω^2. Перевірка за ω^2 показала, що результати підпорядковані н.з.р. з α_{max} = 71,11%;

• **для аналізатора КФК-3:**

$$|as| = 0{,}3695 < S_{as} = 0{,}6145;$$

$$|ex| = 1{,}3747 > S_{ex} = 0{,}9224.$$

У зв'язку з тим, що $|ex| = 1{,}3747 < 5S_{ex} = 4{,}6120$, то є необхідність перевірити $\mathbf{H_o}$ про підпорядкування результатів дослідження теоретичному н.з.р. за критерієм ω^2. Перевірка за ω^2 показала, що результати підпорядковані н.з.р. з α_{max} = 53,37%;

• **для паралельних досліджень на глюкометрі Accu-chek active № 2:**

$$|as| = 0{,}0989 < S_{as} = 0{,}6145;$$

$$|ex| = 1{,}2029 > S_{ex} = 0{,}9224.$$

Таблиця 2.6

Статистичні характеристики матриць за 12-ма рівноточними результатами вимірювань тиску (max і min) і пульсу натщесерце хворого С. з 7:00 до 8:00 год. 19.08.2010 р. та з 7:00 до 8:00 год. 21.08.2010 р. (концентрації глюкози в цільній крові Hb та у плазмі крові Hb')

i	Показник	Тиск, мм.рт.ст.		Пульс, пошт./хв	Hb', ммоль/л	Hb, ммоль/л
		max	min			
1		131	79	84	6,9	6,14
2		132	74	83	6,9	6,14
3		135	80	85	7,3	6,50
4		144	80	84	7,2	6,41
5		142	79	84	7,4	6,50
6		138	76	83	7,5	6,68
7		134	77	82	7,4	6,59
8		131	80	85	7,4	6,59
9		137	74	86	7,3	6,59
10		135	78	86	7,0	6,23
11		141	73	85	7,5	6,68
N=12		138	74	85	7,4	6,59
1.	середня, од.	136,5	77,0	84,3	7,267	6,47
2.	дисперсія, од^2.	18,45(45)	7,27(27)	1,5164	0,0479	0,0388
3.	середнє квадратичне відхилення, од.	4,2959	2,6968	1,2314	0,2188	0,1969
4.	коефіцієнт варіації, %	3,1472	3,5023	1,4607	3,0112	3,0438
5.	$(N\omega^2)_p$	0,03375	0,09014	0,07595	0,13514	0,13514
6.	α_{max}, %	72,638	51,843	56,436	39,610	39,612

Таблиця 2.7

Рівень глюкози (ммоль/л) в капілярній крові хворого С. (на цукровий діабет) (10 рівноточних вимірювань) 20 травня 2008 року (набір статистичних даних)

Номер проби	8:00-8:30 Загальна лабораторія		9:00-9:30 Урґентна лабораторія	
	1	2	3	4
	Аналізатор АГКМ-01 фірми «Квертімед»	Глюкометер Accu-Chek Active (фірма «Roche») №1	Аналізатор КФК-3 (глюкооксидантний метод)	Глюкометер Accu-Chek Active (фірма «Roche Diagnostics GmBH») №2
1	7,2	6,8	6,9	5,9
2	5,9	6,4	7,3	5,5
3	7,0	7,1	7,5	5,5
4	7,1	7,3	5,5	5,8
5	6,6	6,8	6,9	5,7
6	7,0	7,3	7,2	6,1
7	6,9	7,0	5,8	6,0
8	6,8	6,9	5,9	5,6
9	6,7	6,9	6,2	5,3
10	7,8	7,2	7	5,3
	$r_{1,2}$=**0,76095**	$r_{1,3}$= **– 0,08462**	$r_{3,4}$= **– 0,16561**	$r_{2,4}$= **0,24749**
$\overline{x}$ [од.]	6,90	6,97	6,62	5,67
S^2 [од.^{2}]	0,2333	0,0757	0,4996	0,0779
S [од.]	0,4830	0,2751	0,7068	0,2791
γ [%]	7,00	3,95	10,68	4,92
h_1 [од.]	6,9	6,97	6,62	5,67
h_2 [од.^{2}]	47,82	48,649	44,274	32,219
h_3 [од.^{3}]	332,829	340,0219	298,9352	183,4785
h_4 [од.^{4}]	2326,1231	2379,6623	2036,1778	1047,1241
m_1 [од.]	0	0	0	0
m_2 [од.^{2}]	0,21	0,0681	0,4496	0,0701

Продовження табл. 2.7

m_3 [од.^{3}]	–0,027	–0,0109	–0,1114	0,00184
m_4 [од.^{4}]	0,1676	0,01341	0,3285	0,0088
as	–0,2806	–0,61581	–0,3695	0,0989
β_1	0,0787	0,37921	0,1365	0,0098
S_{as}	0,6145	0,61451	0,6145	0,6145
$3S_{as}$	1,8435	1,8435	1,8435	1,8435
ex	0,8	–0,10881	–1,3747	–1,2029
β_2	3,8	2,8912	1,6253	1,7971
S_{ex}	0,9224	0,9224	0,9224	0,9224
$5S_{ex}$	4,612	4,612	4,612	4,612
$N\omega^2_{розр}$	0,0664	0,0373	0,0853	0,0463
α_{max}, %	59,753	71,112	53,366	67,386
$\xi_{\alpha\ (\alpha=0,01)}$	11,20	19,93	8,72	16,06
$\xi_{\alpha\ (\alpha=0,05)}$	6,95	12,37	5,41	9,97
$\xi_{\alpha\ (\alpha=0,20)}$	3,63	6,47	2,83	5,21
$\xi_{\alpha\ (\alpha=0,30)}$	2,78	4,94	2,16	3,98
$\xi_{\alpha\ (\alpha=0,40)}$	2,21	3,93	1,72	3,17
$\xi_{\alpha\ (\alpha=0,50)}$	1,78	3,17	1,39	2,56

У зв'язку з тим, що $|ex|=1,2029 < 5S_{ex} = 4,6120$, то є необхідність перевірити **H_0** про підпорядкування результатів дослідження теоретичному н.з.р. за критерієм ω^2. Перевірка за ω^2 показала, що результати підпорядковані н.з.р. з α_{max}=67,39%.

2. Перевірка нульової гіпотези про рівність ґенеральних дисперсій:

$$H_0: \begin{cases} \sigma_i^2 = \sigma_j^2 \\ \uparrow \qquad \uparrow \\ s_i^2 \neq s_j^2 \end{cases} \quad \text{оцінка}$$

а) для пари приладів 1,2: за критерієм Фішера:

$$F_p = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0,2333}{0,0757} = 3,0819.$$

• Для α = 0,05 $F_т\{q=1–α/2=0,975;\ f_1=9;\ f_2=9\} = 4,03$;

• для α = 0,01 $F_т\{q=1–α/2=0,995;\ f_1=9;\ f_2=9\} = 6,54$.

$$F_p = 3,0819 < F_т = 4,03\ (α = 0,05);$$

$$F_p = 3,0819 < F_т = 6,54\ (α = 0,01).$$

Дисперсії статистично рівні з рівнем значущости α = 0,05 і α = 0,01.

• Для α = 0,05 ступінь рівности: $\xi_1(\mathrm{F}) = \frac{F_T}{F_p} = 1,308;$

залишки ступеня нерівности: $\xi_2(\mathrm{F}) = \frac{F_p}{F_T} = 0,765.$

• Для α = 0,01 ступінь рівности: ξ_1 (F) = 2,122;

залишки ступеня нерівности: ξ_2 (F) = 0,471.

б) для пари приладів 1,3: за критерієм Фішера:

$$F_p = \frac{S_3^2}{S_1^2} = \frac{0,4996}{0,2333} = 2,1414.$$

$$F_p = 2,1414 < F_т = 4,03\ (α = 0,05);$$

$$F_p = 2,1414 < F_т = 6,54\ (α = 0,01).$$

Дисперсії статистично рівні з рівнем значущости α = 0,05 і α = 0,01.

• Для α = 0,05 ступінь рівности: ξ_1 (F) = 1,882;

залишки ступеня нерівности: ξ_2 (F) = 0,531.

• Для α = 0,01 ступінь рівности: ξ_1 (F) = 3,054;

залишки ступеня нерівности: ξ_2 (F) = 0,327.

в) для пари приладів 3,4: за критерієм Фішера:

$$F_p = \frac{S_3^2}{S_4^2} = \frac{0,4996}{0,0779} = 6,41335.$$

$$F_p = 6,41335 > F_т = 4,03\ (α = 0,05);$$

$$F_р = 6{,}41335 < F_т = 6{,}54 \ (\alpha = 0{,}01).$$

Дисперсії статистично нерівні з рівнем значущости $\alpha = 0{,}05$ і статистично рівні з $\alpha = 0{,}01$.

• Для $\alpha=0{,}05$ ступінь нерівности: $\xi_2(F)=1{,}5914$;
залишки ступеня рівности: $\xi_1(F) = 0{,}6284$.

• Для $\alpha = 0{,}01$ ступінь рівности: $\xi_1(F) = 1{,}0197$;
залишки ступеня нерівности: $\xi_2(F) = 0{,}9806$.

г) для пари приладів 2,4: за критерієм Фішера:

$$F_р = \frac{S_4^2}{S_2^2} = \frac{0{,}0779}{0{,}0757} = 1{,}029.$$

$$F_р = 1{,}029 < F_т = 4{,}03 \ (\alpha = 0{,}05);$$

$$F_р = 1{,}029 < F_т = 6{,}54 \ (\alpha = 0{,}01).$$

Дисперсії статистично рівні з рівнем значущости $\alpha= 0{,}05$ і $\alpha = 0{,}01$.

• Для $\alpha = 0{,}05$ ступінь рівности: $\xi_1(F) = 3{,}916$;
залишки ступеня нерівности: $\xi_1(F) = 0{,}255$.

• Для $\alpha = 0{,}01$ ступінь рівности: $\xi_1(F) = 6{,}356$;
залишки ступеня нерівности: $\xi_2(F) = 0{,}157$.

3. Перевірка нульової гіпотези про рівність ґенеральних середніх:

$$H_0 : \begin{cases} a_i & = & a_j \\ \uparrow & & \uparrow \\ \bar{x}_i & \neq & \bar{x}_j \end{cases} \quad \text{оцінка}$$

а) для пари приладів 1,2:

$$t_р = \left| \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{N_1} + \frac{S_2^2}{N_2}}} \right| = \left| \frac{6{,}90 - 6{,}97}{\sqrt{\frac{0{,}2333}{10} + \frac{0{,}0757}{10}}} \right| = 0{,}3982.$$

• Для $\alpha=0{,}05$ $F_т\{q=1–\alpha/2=0{,}975;\ f=f_1+f_2=18\}= 2{,}101$;

• для $\alpha=0{,}01$ $F_т\{q=1–\alpha/2=0{,}995;\ f=f_1+f_2=18\} = 2{,}878$.

$t_р = 0,3982 < t_Т = 2,101$ ($\alpha = 0,05$);

$t_р = 0,3982 < t_Т = 2,878$ ($\alpha = 0,01$).

Середні статистично суттєво рівні.

• Для $\alpha = 0,05$ ступінь рівности: ξ_1 (t) = 5,276;

залишки ступеня нерівности: ξ_2 (t) = 0,1895.

• Для $\alpha = 0,01$ ступінь рівности: ξ_1 (t) = 7,228;

залишки ступеня нерівности: ξ_2 (t) = 0,138.

б) для пари приладів 1,3:

$t_р = 1,2928$.

$t_р = 1,2928 < t_Т = 2,101$ ($\alpha = 0,05$);

$t_р = 1,2928 < t_Т = 2,878$ ($\alpha = 0,01$).

Середні статистично суттєво рівні.

• Для $\alpha = 0,05$ ступінь рівности: ξ_1 (t) = 1,625;

залишки ступеня нерівности: ξ_2 (t) = 0,615.

• Для $\alpha = 0,01$ ступінь рівности: ξ_1 (t) = 2,226;

залишки ступеня нерівности: ξ_2 (t) = 0,449.

в) для пари приладів 3,4:

$t_р = 3,9532$.

$t_р = 3,9532 > t_Т = 2,101$ ($\alpha = 0,05$);

$t_р = 3,9532 > t_Т = 2,878$ ($\alpha = 0,01$).

Середні статистично суттєво нерівні.

• Для $\alpha =0,05$ ступінь нерівности: ξ_2 (t) = 1,887;

залишки ступеня рівности: ξ_1 (t) = 0,5314.

• Для $\alpha =0,01$ ступінь нерівности: ξ_2 (t) = 1,374;

залишки ступеня рівности: ξ_1 (t) = 0,7280.

г) для пари приладів 2,4:

$t_р = 10,4893$.

$t_р = 10,4893 > t_Т = 2,101$ ($\alpha = 0,05$);

$t_р = 10,4893 > t_Т = 2,878$ ($\alpha = 0,01$).

Середні статистично суттєво нерівні.

• Для α=0,05 ступінь нерівности: ξ_2 (t) = 4,993;

залишки ступеня рівности: ξ_1 (t) = 0,2003.

• Для α=0,01 ступінь нерівности: ξ_2 (t) = 3,645;

залишки ступеня рівности: ξ_1 (t) = 0,2744.

4. Перевірка нульової гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції.

$$H_0:\begin{cases}\mu_i & = & \mu_j \\ \uparrow & & \uparrow \\ r_i & \neq & r_j\end{cases} \text{оцінка}$$

4.1. За критичним значенням коефіцієнта кореляції $r_{кр.}$:

$r_{кр.}$={q=1–α/2=0,975; f=N–2 = 8} = 0,6319;(α = 0,05)

$r_{кр.}$={q=1–α/2=0,995; f=N–2 = 8} = 0,7646. (α = 0,01)

а) Для пари приладів 1,2:

• **α=0,05:** $r_{1,2}$ = 0,760954 > $r_{кр.}$ = $r_{0,05}$ = 0,6319.

Є лінійний зв’язок.

Ступінь лінійности: $\xi_1(\mathrm{r}) = \dfrac{|r_{12}|}{r_{0,05}} = 1{,}204;$

ступінь нелінійности: ξ_2 (r) = 0,830.

• **α=0,01:** $r_{1,2}$ = 0,760954 ≈ $r_{кр.}$ = $r_{0,01}$ = 0,7646.

Є лінійний зв’язок.

Ступінь нелінійности: ξ_2 (r) = 1,00479 ≈ 1.

ступінь лінійности: ξ_1 (r) = 0,995 ≈ 1.

б) Для пари приладів 1,3:

• **α=0,05:** $r_{1,3}$ = | – 0,08462| < $r_{кр.}$ = $r_{0,05}$ = 0,6319. **Немає лінійного зв’язку.**

Ступінь нелінійности: ξ_2 (r) = 7,468;

ступінь лінійности: ξ_1 (r) = 0,134.

• **α=0,01:** $r_{1,2}$ = | – 0,08462| < $r_{кр.}$ = $r_{0,01}$ = 0,7646. **Немає лінійного зв’язку.**

Ступінь нелінійности: ξ_2 (r) = 9,036;

ступінь лінійности: ξ_1 (r) = 0,111.

в) Для пари приладів 3,4:

• **α=0,05:** $r_{1,2} = |-0,16561| < r_{кр.} = r_{0,05} = 0,6319$. **Немає лінійного зв'язку.**

Ступінь нелінійности: ξ_2 (r) = 3,816;

ступінь лінійности: ξ_1 (r) = 0,262.

• **α=0,01:** $r_{3,4} = |-0,16561| < r_{кр.} = r_{0,01} = 0,7646$. **Немає лінійного зв'язку.**

Ступінь нелінійности: ξ_2 (r) = 4,617;

ступінь лінійности: ξ_1 (r) = 0,217.

г) Для пари приладів 2,4:

• **α=0,05:** $r_{2,4} = 0,247496 < r_{кр.} = r_{0,05} = 0,6319$. **Немає лінійного зв'язку.**

Ступінь нелінійности: ξ_2 (r) = 2,553;

ступінь лінійности: ξ_1 (r) = 0,392.

• **α=0,01:** $r_{1,2} = 0,247496 < r_{кр.} = r_{0,01} = 0,7646$. **Немає лінійного зв'язку.**

Ступінь нелінійности: ξ_2 (r) = 3,089;

ступінь лінійности: ξ_1 (r) = 0,324.

4.2. За t-критерієм Стюдента:

а) Для пари приладів 1,2:

$$t_p = \frac{r_{1,2}}{\sqrt{1-r_{1,2}^2}}\sqrt{N-2} = \frac{0,760954}{\sqrt{1-0,760954^2}}\sqrt{10-2} = 3,3174.$$

• **α=0,05:** $t_p = 3,3174 > t_{0,05} = t_T\{0,975;\ f=8\} = 2,306$;

• **α=0,01:** $t_p = 3,3174 \approx t_{0,01} = t_T\{0,995;\ f=8\} = 3,355$.

• Для α = 0,05 ξ_1 (t) = 1,462; ξ_2 (t) = 0,684;

• для α = 0,01 ξ_1 (t) = 1,011 ≈ 1; ξ_2(t) = 0,989 ≈ 1.

Є лінійний зв'язок.

б) Для пари приладів 1,3:

$$t_p = \frac{r_{1,2}}{\sqrt{1-r_{1,2}^2}}\sqrt{N-2} = \frac{-0,08462}{\sqrt{1-(-0,08462)^2}}\sqrt{10-2} = -0,2411.$$

• **α=0,05:** $t_p = |-0,2411| < t_{0,05} = t_T\{0,95;\ f=8\} = 2,306$;

• **α=0,01:** $t_p = |-0,2411| < t_{0,01} = t_T\{0,99;\ f=8\} = 3,355$.

• Для $\alpha = 0{,}05$ $\xi_1(t) = 0{,}105$; $\xi_2(t) = 9{,}564$;

• для $\alpha = 0{,}01$ $\xi_1(t) = 0{,}072$; $\xi_2(t) = 13{,}915$.

Немає лінійного зв'язку.

в) Для пари приладів 3,4:

$$t_p = \frac{r_{1,2}}{\sqrt{1-r_{1,2}^2}}\sqrt{N-2} = \frac{-0{,}16561}{\sqrt{1-(-0{,}16561)^2}}\sqrt{10-2} = -0{,}4750.$$

• **α=0,05:** $t_p = |-0{,}4750| < t_{0,05} = t_T\{0{,}95;\ f=8\} = 2{,}306$;

• **α=0,01:** $t_p = |-0{,}4750| < t_{0,01} = t_T\{0{,}99;\ f=8\} = 3{,}355$.

• Для $\alpha = 0{,}05$ $\xi_1(t) = 0{,}206$; $\xi_2(t) = 4{,}855$;

• для $\alpha = 0{,}01$ $\xi_1(t) = 0{,}142$; $\xi_2(t) = 7{,}063$.

Немає лінійного зв'язку.

г) Для пари приладів 2,4:

$$t_p = \frac{r_{1,2}}{\sqrt{1-r_{1,2}^2}}\sqrt{N-2} = \frac{0{,}247496}{\sqrt{1-0{,}247496^2}}\sqrt{10-2} = 0{,}7225.$$

• **α=0,05:** $t_p = 0{,}7225 < t_{0,05} = t_T\{0{,}95;\ f = 8\} = 2{,}306$;

• **α=0,01:** $t_p = 0{,}7225 < t_{0,01} = t_T\{0{,}99;\ f = 8\} = 3{,}355$.

• Для $\alpha = 0{,}05$ $\xi_1(t) = 0{,}313$; $\xi_2(t) = 3{,}192$;

• для $\alpha = 0{,}01$ $\xi_1(t) = 0{,}215$; $\xi_2(t) = 4{,}644$.

Немає лінійного зв'язку.

4.3. За z-функцією перетворення Фішера:

а) Для пари приладів 1,2:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} = 0{,}377964;$$

$$z_p = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{1,2}}{1-r_{1,2}} = 0{,}998477.$$

• Для $\alpha = 0{,}05$ $z_p = 0{,}998477 > (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z) =$

$= z_{\{1-0{,}05/2\}} \cdot 0{,}377964 = 1{,}96 \cdot 0{,}37796 = 0{,}74081$;

• для $\alpha = 0{,}01$ $z_p = 0{,}998477 > (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z) =$

$=z_{\{1-0{,}01/2\}} \cdot 0{,}377964 = 2{,}58 \cdot 0{,}37796 = 0{,}975148.$

$z_p > (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z)$. **Лінійний зв'язок суттєвий.**

• Для $\alpha = 0{,}05$ ступінь лінійности:

$$\xi_1(z) = \frac{z_p}{(z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z)} = 1{,}348;$$

ступінь нелінійности: $\xi_2(z) = 0{,}742$.

• Для $\alpha = 0{,}01$ ступінь лінійности: $\xi_1(z) = 1{,}024$;

ступінь нелінійности: $\xi_2(z) = 0{,}977$.

б) Для пари приладів 1,3:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} = 0{,}377964;$$

$$z_p = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{1,2}}{1-r_{1,2}} = -0{,}08482.$$

• Для $\alpha = 0{,}05$ $z_p = |-0{,}08482| < (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z) =$

$=z_{\{1-0{,}05/2\}} \cdot 0{,}377964 = 1{,}96 \cdot 0{,}37796 = 0{,}74081;$

• для $\alpha = 0{,}01$ $z_p = |-0{,}08482| < (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z) =$

$=z_{\{1-0{,}01/2\}} \cdot 0{,}377964 = 2{,}58 \cdot 0{,}37796 = 0{,}975148.$

$z_p < (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z)$. **Немає лінійного зв'язку.**

• Для $\alpha = 0{,}05$ ступінь лінійности:

$$\xi_1(z) = \frac{z_p}{(z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z)} = 0{,}114;$$

ступінь нелінійности: $\xi_2(z) = 8{,}734$.

• Для $\alpha = 0{,}01$ ступінь лінійности: $\xi_1(z) = 0{,}089$;

ступінь нелінійности: $\xi_2(z) = 11{,}496$.

в) Для пари приладів 3,4:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} = 0{,}377964;$$

$$z_p = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{1,2}}{1-r_{1,2}} = -0{,}16715.$$

• Для $\alpha = 0{,}05$ $z_p = |-0{,}16715| < (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z) =$

$=z_{\{1-0,05/2\}} \cdot 0{,}377964 = 1{,}96 \cdot 0{,}37796 = 0{,}74081$;

• для $\alpha = 0{,}01$ $z_p = |-0{,}16715| < (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z) =$

$=z_{\{1-0,01/2\}} \cdot 0{,}377964 = 2{,}58 \cdot 0{,}37796 = 0{,}975148$.

$z_p < (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z)$. **Немає лінійного зв'язку.**

• Для $\alpha = 0{,}05$ ступінь лінійности:

$$\xi_1(z) = \frac{z_p}{(z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z)} = 0{,}226;$$

ступінь нелінійности: $\xi_2(z) = 4{,}432$.

• Для $\alpha = 0{,}01$ ступінь лінійности: $\xi_1(z) = 0{,}171$;

ступінь нелінійности: $\xi_2(z) = 5{,}834$.

г) Для пари приладів 2,4:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}} = 0{,}377964;$$

$$z_p = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{1,2}}{1-r_{1,2}} = 0{,}252744.$$

• Для $\alpha = 0{,}05$ $z_p = 0{,}252744 < (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z) =$

$=z_{\{1-0,05/2\}} \cdot 0{,}377964 = 1{,}96 \cdot 0{,}37796 = 0{,}74081$;

• для $\alpha = 0{,}01$ $z_p = 0{,}252744 < (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z) =$

$=z_{\{1-0,01/2\}} \cdot 0{,}377964 = 2{,}58 \cdot 0{,}37796 = 0{,}975148$.

$z_p < (z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z)$. **Немає лінійного зв'язку.**

• Для $\alpha = 0{,}05$ ступінь лінійности:

$$\xi_1(z) = \frac{z_p}{(z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_z)} = 0{,}341;$$

ступінь нелінійности: $\xi_2(z) = 2{,}931$.

• Для $\alpha = 0{,}01$ ступінь лінійности: $\xi_1(z) = 0{,}259$;

ступінь нелінійности: $\xi_2(z) = 3{,}858$.

Перевірка нульової гіпотези $\mathbf{H_0}$: $\rho=0$ рівности нулю генеральних коефіцієнтів кореляції (за оцінками вибіркових коефіцієнтів кореляції) за $\mathbf{r_{кр}}$, t-критерієм та z-функцією для двох рівнів значущости $\alpha=0{,}05$ та $\alpha=0{,}01$, оцінками ступенів лінійности кореляційного зв'язку: $\xi_1(r)$, $\xi_1(t)$, $\xi_1(z)>1$ (при цьому $\xi_2(r)$, $\xi_2(t)$, $\xi_2(z) \leq 1$) та ступенів нелінійности кореляційного зв'язку $\xi_2(r)$, $\xi_2(t)$, $\xi_2(z) \geq 1$ (при цьому $\xi_1(r)$, $\xi_1(t)$, $\xi_1(z) < 1$) дозволили зробити такі висновки:

1) коефіцієнт кореляції $\mathbf{r_{1,2}}$ статистично значущий (є надійний лінійний зв'язок) з рівнями значущости $\alpha=0{,}05$ та $\alpha=0{,}01$ за $\mathbf{r_{кр}}$, t-критерієм та z-функцією;

2) коефіцієнти кореляції $r_{1,3}$, $r_{3,4}$, $r_{2,4}$ статистично незначущі (відсутній надійний лінійний зв'язок – є надійний нелінійний зв'язок) з рівнями значущости $\alpha=0{,}05$ та $\alpha=0{,}01$ за $\mathbf{r_{кр}}$.

ВИСНОВКИ

1. Розроблено методики застосування методів лінійної кореляції між двома величинами лінійної множинної кореляції та реґресії в хімії та хімічній технології.
2. На числовому прикладі №1, взятого з хімічного матеріалознавства, показано процедуру розрахунків коефіцієнтів лінійного рівняння множинної реґресії та його кореляції за кількістю параметрів математичної моделі та числа спостережень (числа експериментів).
3. На числовому прикладі №1 отримано: лінійне рівняння множинної реґресії залежности границі міцности $\sigma_в$ від концентрацій основних компонентів C(Mg), C(Fe) та C(Si) в алюмінієвому стопі АМг6; розрахований коефіцієнт множинної кореляції та доведена його значущість та ступенів лінійности та нелінійности (для ступеня значущості 1 і 5 %) за критичним коефіцієнтом кореляції, критерієм Стьюдента та перетворенням Фішера.
4. На числовому прикладі №2, взятому з медичної хімії, дано оцінку відновленности результатів дано за 12-ма рівноточними дослідами, при цьому за ω^2-критерієм показано, що ці результати підпорядковані нормальному закону розподілу Ґаусса з максимальним рівнем значущости: 72,638% (тиск, SIS), 51,843% (тиск, DIS), 56,436% (пульс), 39,612% (вміст глюкози в капілярній цільній крові) та 39,610 (вміст глюкози в плазмі капілярної крові).
5. Порівняння результатів (приклад №2) дослідження за 10-ма рівноточними одночасними вимірюваннями вмісту глюкози в капілярній цільній крові на чотирьох приладах показало, що ці результати підпорядковані нормальному розподілу Ґаусса з максимальним рівнем значущости: 53,366–71,112%, ступінь підпорядкування (для рівня значущости 50%) складає 1,39–3,17, що дозволили з високою точністю і надійністю встановити лінійний кореляційний зв’язок, який за вмістом

глюкози в цільній крові складає 76,095% (між аналізатором АГКМ-01 та глюкометром Accu-Chek Active № 1). Між аналізатором АГКМ-01 та аналізатором КФК-3, між аналізатором КФК-3 та глюкометром Accu-Chek Active № 2, між глюкометрами Accu-Chek Active № 1 і № 2 такий зв'язок відсутній.

6. Перевірка за вибірковими даними (приклад №2) нульової гіпотези про рівність ґенеральних дисперсій результатів дослідження вмісту глюкози в капілярній цільній крові, отриманих на різних приладах та різною методикою, показала, що для приладів 1,2; 1,3; 2,4 з рівнем значущости 0,05 і 0,01 та для приладів 3,4 з рівнем значущости α=0,01 така рівність статистично суттєва.
7. Перевірка за вибірковими даними (приклад №2) нульової гіпотези про рівність генеральних середніх результатів дослідження вмісту глюкози в капілярній цільній крові, отриманих на різних приладах та за різною методикою, показала, що для приладів 1,2 (аналізатора АГКМ-01 та прилада Accu-Chek Active № 1); 1,3 (аналізатора АГКМ-01 та аналізатора КФК-3) спостерігається суттєва статистична рівність з рівнями значущости α=0,01 і α=0,05, а для приладів 3,4 (аналізатор КФК-3 та Accu-Chek Active № 2) та 2,4 (приладів Accu-Chek Active № 1 та № 2) така статистична нерівність суттєва для α=0,01 та α=0,05.
8. Перевірка значущости лінійної кореляції (приклад №2) між результатами вмісту глюкози в капілярній цільній крові, що отримані на різних приладах за критичним коефіцієнтом кореляції, t-критерієм Стюдента, та z-перетвореням Фішера, показала, що між результатами на приладах 1,2 (аналізатора АГКМ-01 та прилада Accu-Chek Active № 1) є надійний лінійний зв'язок з рівнями значущости α=0,01 та 0,05, для решта пар приладів між результатами надійного лінійного зв'язку не виявлено.

Список використаних літературних джерел

1. Абезгауз Г.Г. Справочник по вероятностным расчетам. – М., 1970.
2. Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента. – М.: Металлургия, 1969.
3. Адлер Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. – 2-е изд., перераб. и допол. – М.: Наука, 1976. – 280 с.: ил., табл.–Библиогр. в конце гл.
4. Адлер Ю.П., Грановский Ю.В. Обзор прикладных работ по планированию эксперимента. – М.: Изд-во МГУ, 1967. – 96с.
5. Айала Ф., Кайгер Дж. Современная генетика: в 3-х томах/ Пер. с англ. А.Д. Базыкина. – Т.3. – М.: Мир, 1988. – 336с.
6. Айвазян А.С. Статистическое исследование зависимостей. – М.: Металлургия, 1966.
7. Активный эксперимент при рецептурно-технологическом моделировании/ В.А. Вознесенский, В.С. Калмуцкий, Л.А. Коган и др.// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.343-347.
8. Анализ структуры древесных ценозов/ А.И. Бузыкин, В.Л. Гавриков, О.П. Секретенко, Р.Г. Хлебопрос/ Под ред. Д.М. Киреева. – Новосибирск: Наука, 1985. – 95с.
9. Анисимов В.В., Лебедев Е.А. Стохастические сети обслуживания. Марковские модели: Учеб. для вузов. – К.: Либідь, 1992. – 208с.
10. Ахназарова С.Л. Оптимизация эксперимента в химии и химической технологи / С.Л. Ахназарова, В.В. Кафаров. – М.: Высш. шк., 1978. – 320 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 302 – 303 (53 наимен.). – Приложения: с. 304 – 317 (14 табл.).
11. Балантер Б.И., Ханин М.А., Чернавский Д.С. Введение в математическое моделирование патологических процессов. – М., 1980.

12. Баранкевич М.М. Методи і моделі випадкових процесів. – Львів, 1986. – 71с.
13. Баталин Г.И. Сборник примеров и задач по физической химии: Учеб. пособие. Введение: с.7-39 (Обработка результатаов наблюдений…). – К.: Изд-во КДУ, 1960. – 548 с.: ил. 133 рис. – Табл.51. – Прилож.: с.471-539 (15 табл.). – Ответы: с.540-546.
14. Батунер Л.М., Позин М.Е. Математические методы в химической технике. – Л.: Химия, 1968. – 824с.
15. Бейли Н. Математика в биологии и медицине/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1970.
16. Бейли Н. Статистические методы в биологии / Норман Бейли; пер. с англ. В.П. Смилги; под ред., предисловии В.В. Налимова. – М.: Мир, 1963. – 272 с. Перевод за изд.: Statistical Methods in Biology by Norman T. J. Bailey, M.A., D.S.C. Reader in Biometry, University of Oxford. – The English Universities Press Ltd., 1959. – ил., табл. – Библиогр.: с. 7 (5 наим.), с. 222 (9 наим.). – Руковод. по применению статист. формул: с. 223 – 259. – Прилож.: с. 260 – 267 (5 табл.).
17. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980. – 336с.
18. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976.
19. Бендат Дж.С. Измерение и анализ случайных процессов / Дж.С. Бендат, А.Г. Пирсол; пер. с англ. Г.В.Матушевского, В.Е.Привальского; под ред. И.Н.Коваленко. – М.: Мир, 1971. – 408 с. – Перевод за изд.: Measurement and analysis of random data / Julius S. Bendat, Allan G. Piersol. – John Wiley and Sons, Inc. – New York-London-Sydney, 1967.: ил., табл. – Предмет. указатель: с. 403-408. – Библиогр.: с. 400-402 (59 наименов.).
20. Березина Л.Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей / Л.Ю. Березина. – М.: Просвещение, 1979. – 144 с.: ил. – Упраж. после гл.

– Ответы и указ.: с. 135 – 141. – Библиогр.: с. 132- 134 (73 назв.). – Упраж. после гл.

21. Бермант А.Ф. Краткий курс математического анализа/ Под ред. И.Г. Арамановича. – М.: Физматиздат, 1963. – 664с.
22. Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г. Математико-статистические методы экспертных оценок. – М.: Статистика, 1974.
23. Биометрические аспекты изучения целостности организма/ Под ред. Б.С. Шорникова. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 152с.
24. Биометрический анализ в биологии = Biometrical analysis in biology: [собрание науч. работ / отв. ред. Г.Н. Зайцев]. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. – 160 с.: ил., табл. – Библиогр. в конце ст.
25. Биометрия/ Н.В. Глотов, Л.А. Животовский, Н.В. Хованов, Н.Н. Хромов-Борисов. – Л., 1982.
26. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1968.
27. Бондар А.Г., Статюха Г.А. Планирование эксперимента в химической технологии. – К.: Вища шк., 1976. – 220с.
28. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986. – 431с.
29. Бородюк В.П. Проверка однородности статистических данных в регрессионном анализе// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С. 7-12.
30. Браунли К.А. Статистические исследования в производстве. – М.: Иностр. лит., 1949.
31. Бродский В.З. Введение в факторное планирование эксперимента. – М.: Наука, 1976. – 225с.
32. Варковецкий М.М., Сазонов А.Л. Методы дисперсионного анализа в текстильных исследованиях. – М.: Легкая индустрия, 1977. – 136с.
33. Василевич В.И. Статистические методы в геоботанике. – Л.: Наука, 1969. – 232с.

34. Введение в методы байесовского статистического вывода/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 335с.
35. Веденепин Г.В. Общая методика экспериментальных исследований и обработка опытных данных. – М., 1973.
36. Венецкий И.Г. Теория вероятностей и математическая статистика / И.Г. Венецкий, Г.С. Кильдишев. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Статистика, 1975. – 264 с.: ил., табл. – Приложения: с. 255-264 (9 табл.).
37. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука.
38. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 480с.
39. Веселая Г.Н., Егорова Н.В. О математических моделях технологических процессов, полученных по данным пассивных наблюдений// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.24-28.
40. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник/ В.П. Дубовик, І.І.Юрик, І.П. Волкодав та ін./ За ред. В.П. Дубовика і І.І.Юрика. – К.: А.С.К., 2001. – 480с.
41. Войтенко В.П. Виборчі технології у дзеркалі математики. – К.: Ін-т відкритої політики, 1999. – 13с.
42. Волков П.Н. Планирование эксперимента. – М.: МАДИ, 1972.
43. Волощенко А.Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посібник для самост. вивчення дисц. [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / А.Б. Волощенко, І.А. Джалладова; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 14 / 18.2-613 від 22.03.2002 р.]. – К.: Київ. Нац. економ. ун-т, 2003. – 256 с.: іл., табл. – Приклади розв. завдань і вправи для самост. розв’язання в кінці розд. – Блочно-модул. контроль: с. 183 – 203 (9 варіантів). – Відповіді: с. 204 – 216. - – Бібліогр.: с. 217 (18 назв). – Додатки: с. 218 – 254 (8 табл.). – ISBN 966 – 574 – 459– 3.

44. Воробьев Ф.П., Голобородько Н.К., Мануйлова А.М. Математическое планирование эксперимента в биохимии и медицине. – Х.: Вища шк., 1977. – 144с.
45. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев. – М.: Наука, 1971.
46. Гиляров А.М. Популяционная экология. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 192с.
47. Гирко В.Л. Спектральная теория случайных матриц. – М.: Наука, 1988. – 375с.
48. Гладышев Е.Г. О стохастической аппроксимации// Теория вероятностей и ее применение. - №2. – 1965.
49. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 447с.
50. Гнеденко Б.В. Математические методы в теории надежности. – М., 1965.
51. Горский В.Г., Адлер Ю.П. Планирование промышленных экспериментов (модели статики). – М.: Металлургия, 1974. – 264с.
52. Горский В.Г., Адлер Ю.П., Талалай А.М. Планирование промышленных экспериментов (модели динамики). – М.: Металлургия, 1974. – 112с.
53. Горский В.Г., Бродский В.З. О построении рототабельных планов второго порядка на базе симплексов// Проблемы планирования эксперимента. – М: Наука, 1969. – С.79-88.
54. Грабарник П.Я., Комарова А.С. Статистический анализ горизонтальной структуры древостоя// Моделирование биогеоценотических процессов. – М.: Наука, 1967. – С.119-135.
55. Гришин В.К. Статистические методы анализа и планирования экспериментов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. – 128с.
56. Гублер Е.В., Генкин А.А. Применение непараметрических критериев статистики в медико-биологических исследованиях. – Л., 1973.
57. Далецкий Ю.Л., Белопольская Я.И. Стохастические управления и дифференциальная геометрия. – К.: Выща шк., 1989. – 295с.

58. Демьянов Ю.Э., Литвин Ф.Ф. Применение математических методов и ЭВМ в биологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 135с.
59. Деркач М.П. Курс варіаційної статистики. – К.: Вища школа, 1977. – 207с.
60. Дисперсия// БСЭ. – Т.8. - М.: Сов. энциклопедия, 1972. – 592с. – С. 306.
61. Дідух Я.П. Популяційна екологія. – К.: Фітосоціоцентр, 1998. – 192с.
62. Доерфель К. Статистика в аналитической химии. – М.: Мир, 1969.
63. Дорогов В.И., Чистяков В.П. Вероятные модели превращения частиц. – М.: Наука, 1988. – 110с.
64. Доспехов Б.А. Планирование полевого опыта и статистическая обработка его данных. – М., 1972.
65. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – М.: Статистика, 1973.
66. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648с.
67. Дэйвисон М. Многомерное шкалирование: Методы наглядного представления данных/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 254с.
68. Дэниел К. Применение статистики в промышленном эксперименте / Кутберт Дэниел; пер. с англ. под ред. Э.К. Лецкого. – М.: Мир, 1979. – 301 с. – Перевод за изд.: Applications of statistics to industrial experimentation / Cuthbert Daniel. – John Wiley and Sons. – New York-London-Sydney-Toronto, 1976.: ил., табл. – Библиогр.: с. 289 – 292 (92 наим.). – Предмет. указатель: с. 293 – 294. – Приложения в конце гл.
69. Егоров Н.С. Основы учения об антибиотиках. – М.: Высш. шк., 1986. – 448с.
70. Езекиэл М., Фокс К. Методы анализа корреляций и регрессий. – М.: Статистика, 1966. – 470с.

71. Жалдак М.И., Квитко А.Н. Теория вероятностей с элементами информатики: Практикум/ Под общ. ред. М.И. Ядренко. – К.: Вища шк., 1989. – 261с.

72. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник [для студ. економ. вищ. навч. заклад.]: У 2-х ч. – Ч. ІІ. Математична статистика / В.І. Жлуктенко, С.І Наконечний, С.С. Савіна; [Мін-во освіти і науки України; гриф: лист № 14 / 18.2-183 від 27.02.2001 р.]. – К.: Київ. нац. економ. ун-т, 2001. – 336 с.: іл., табл. – Теор. запит. та завдання до теми в кінці теми. – Лаб. роб. після тем 14, 15. – Додатки: с. 242 – 246, 292 – 331. – Бібліогр.: с. 246 (4 назви).– ISBN 966–574–265 – 5.

73. Жоров Ю.М. Моделирование физико-химических процессов нефтепереработки и нефтехимии. – М.: Химия, 1978. – 376с.

74. Журнал «Заводская лаборатория». Математические методы исследования. – М.: Металлургия, 1963-1985.

75. Завадский Ю.В. Математические таблицы для вероятностных расчетов. – М.: МАДИ, 1962.

76. Завадский Ю.В. Методика статистической обработки экспериментальных данных. – М.: ВИНИТИ, 1973. – 98с.

77. Завадский Ю.В. Моделирование случайных процессов. – М.: ВИНИТИ, 1974. – 100с.

78. Завадский Ю.В. Основные сведения по математический статистике. – М., 1971.

79. Загускин В.Л. Численные методы решения плохо обусловленных задач. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1976.

80. Зажигаев Л.С. Методы планирования и обработки результатов физического эксперимента / Л.С. Зажигаев, А.А. Кишьян, Ю.И. Романиков. – М.: Атомиздат, 1978. – 232 с.: ил., табл. – Приложение: с. 144-229 (16 табл.). – Библиогр.: с. 230-231.

81. Зайдель А.Н. Элементарные оценки ошибок измерений. – М., 1968.

82. Зайцев Г.Н. Методика биометрических расчетов. Математическая статистика в экспериментальной ботанике. – М., 1973.

83. Зак Ш. Теория статистических выводов. – М.: Мир, 1975. – 776с.

84. Згуровський М. Технологічні передбачення як інструмент прийняття стратегічних рішень/ Дзеркало тижня. - №39(363). – 3 жовтня 2001. – С.14.

85. Злобин Ю.А. Принципы и методы изучения ценотических популяций растений. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1989. – 148с.

86. Золотарев В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416с.

87. Иванов А.Б. Поверхости второго порядка// БСЭ. – Т.20. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 608с. – С. 72-73.

88. Иванов А.З., Круг Г.К. Оптимизация сложного технологического процесса методом эволюционного планирования эксперимента// Труды Москов. энергет. ин-та, 1963. – Вып.51.

89. Иванов А.З., Круг Г.К., Чирков И.М. Экспериментально-статистические методы получения математического описания и оптимизации сложных технологических процессов// Руководящие технические материалы. – М.: НИИТЭХЧМ, 1964. – Вып.2.

90. Изучение экстракционного разделения циркония и гафния с помощью метода симплекс-планирования/ Н.С. Смирнова, Ю.В. Грановский, Л.Н. Комисарова и др.// Теоретические основы химической технологии. – №4.– 1968.

91. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296с.

92. Іванюта І.Д. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посібник [для студ. економ. спеціал. вищ. навч. заклад.] / І.Д. Іванюта, В.І. Рибалка, І.А. Рудоміно-Дусятська; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 14 / 18.2-271 від 11.02.2003 р.]. – К.:

Слово, 2003. – 271 с:. іл., табл. – Завдання до самостійн. роботи: с. 235 – 261 (15 завд.). – Додатки: с. 262 – 267 (6 табл.). – Бібліогр.: с. 268 (6 назв). – ISBN 966 – 8407 – 01 – 6.

93. К вопросу о математическом планировании химического эксперимента/ Ю.В. Грановский, Л.Н. Комисарова, Н.С. Смирнова, В.И. Спицын// Докл. АН СССР. – 1967. – Т.176. - №3.
94. Кассандрова О.Н. Обработка результатов наблюдений: Учеб. пособие [для студ. высш. учеб. завед.] / О.Н. Кассандрова, В.В. Лебедев. – М.: Наука, 1970. – 104 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 103 – 104 (28 наимен.). – Приложения: с. 91 – 102 (6 табл.).
95. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. – М.: Химия, 1976.
96. Кельниц Ю.В. Теория ошибок измерений. – М.: Недра, 1967.
97. Кемени Дж.Дж., Снелл Дж.Л., Кнепп А.У. Счетные цепи Маркова/ Пер. с англ. – М.: Наука, 1987. – 416с.
98. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи/ Пер. с англ. под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1973. – 900с.
99. Коваленко И.И., Кеденко Б.В. Теория вероятностей. – К.: Вища шк., 1990. – 328с.
100. Коваленко И.И., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1982. – 320с.
101. Козлов М.В. Элементы теории вероятностей в примерах и задачах. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 343с.
102. Козлов М.В., Прохоров А.В. Введение в математическую статистику. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 262с.
103. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – 4-е изд.; пер. с англ. И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна и др.; под общ. ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1978. – 832 с. – Перевод за изд.:

Mathematical Handbook for Scientists and Engineers Definitions, Theorems and Formulas for Reference and Review. – Second, Enlargend and Revised Edition / Granino A. Korn, Ph. D., Theresa M. Korn, M.S. – NcGraw-Hill Book Company: New York-San Francisco-Toronto-London-Sydney, 1968. – ил., табл. – Библиогр.: с. 796 – 800 (183 наим.). – Указ. важн. обозн.: с. 801 – 803. – Предмет. указ.: с. 804 – 831. – Перечень табл. по гл.: с. 20 – 22.

104. Коробчук І.В., Коробчук Т.І. Курс теорії ймовірностей та математичної статистики. – Луцьк: Луцьк. держ. техн. ун-т, 2001. – Ч.1. – 148с. – Ч.ІІ – 80с.
105. Коробчук І.В., Коробчук Т.І. Лекції з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. – Луцьк: Луцьк. держ. техн. ун-т, 2001. – 143с.
106. Котов В.Н. Применение теории измерений в биологических исследованиях. – К.: Наукова думка, 1985. – 100с.
107. Крамер Г. Математические методы статистики. – М.: Мир, 1975. – 630с.
108. Крышев И.И., Сазыкина Т.Г. Математическое моделирование миграции радионуклидов в водных экосистемах. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 152с.
109. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – М.: Высш. шк., 1970. – Т.1. – 589с. – Т.2. – 422с.
110. Кузишин О.В. Критерії оцінки розподілу мікровиступів на поверхні твердого тіла / О.В. Кузишин, О.Г. Сіренко, Л.Я. Мідак, Г.О. Сіренко // Фізика і хімія твердого тіла. – 2008. – Т. 9. – № 2. – С.407-414: іл. 1, табл. 2. – Бібліогр.: с. 412 (52 назви).
111. Куршакова Ю.С. Корреляционный и регрессионный анализ в практическом применении. Теория отбора в популяциях растений. – Новосибирск, 1976.
112. Лаврик В.І. Методи математичного моделювання в екології. – К.: Фітосоціоцетр, 1998. – 132с.

113. Лакин Г.Ф. Биометрия: Учеб. пособие [для биол. спец. вузов] / Георгий Филиппович Лакин. – 4-е изд., пераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 352 с.: ил., табл. – Прилож.: с. 319 – 345 (26 мат. табл.). - Библиогр.: с. 346 – 347 (58 наим.). – Предмет. указ.: с. 348 – 350.
114. Леман Э. Проверка статистических гипотез. – М.: Наука, 1964.
115. Лещинський О.Л. Практикум з економетрії: Навч. посібник/ О.Л. Лещинський, В.В. Рязанцева. – К: Видавничий Дім «Персонал», 2009. – 256с. – Бібліогр.: с.251-252.
116. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. – М.: Физматгиз, 1962. – 352с.
117. Лукомский Я.И. Теория корреляции и ее применение к анализу производства. – М.: Госстатиздат, 1961.
118. Лысенков А.Н. Математические методы планирования многофакторных медико-биологических экспериментов. – М., 1974.
119. Лысенков А.Н. О некоторых планах второго порядка и их использовании при исследовании многофакторных объектов// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С. 97-111.
120. Любищев А.А. Дисперсионный анализ в биологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 200с.
121. Максимов Г.К., Синицын А.Н. Статистическое моделирование многомерных систем в медицине. – Л., 1983.
122. Малюта М.Б., Заиграев А.Ю. Современные задачи оптимального планирования регрессионных экспериментов. – К.: Вища шк., 1989. – 64с.
123. Маркова Е.В. Латинские квадраты в планировании эксперимента// Заводская лаборатория. – 1968, №1.
124. Маркова Е.В. О применении комбинаторного анализа в планировании эксперимента// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.125-133.

125. Маркова Е.В. Руководство по применению латинских планов при планировании эксперимента с качественными факторами. – Челябинск: УралНИИстройпроект, 1971. – 156с.
126. Маркова Е.В., Лисенков А.Н. Планирование эксперимента в условиях неоднородностей. – М.: Наука, 1973. - 220с.
127. Маркова Е.В., Рохваргер А.Е. Математическое планирование химического эксперимента. – М.: Знание, 1971. – 32с.
128. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 310с.
129. Математические методы в биологии// Труды респуб. конф. – К.: Наукова думка, 1983. – 287с.
130. Математические модели экосистемы: экология и демографические последствия ядерной войны/ Под ред. А.А. Дородницына. – М.: Наука, 1986. – 176с.
131. Математическое моделирование и планирование эксперимента/ Под ред. Г.Н. Богачова. – Л.: Химия, 1971. - 189с.
132. Математичні методи в хімії і хімічній технології/ Ю.К. Руданський, Є.М. Мокрий, З.Г. Піх та ін. – Львів: Світ, 1993. – 208с.
133. Менчер Э.М. О новой методике движения по гиперплоскости методом эволюционного планирования// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.138-144.
134. Меркурьева Е.К. Биометрия в селекции и генетике сельскохозяйственных животных. – М., 1970.
135. Меркурьева Е.К., Шангин-Березовский Г.Н. Генетика с основами биометрии. – М., 1983.
136. Методологические проблемы современной биологии и медицины/ Под ред. Г.И. Царегородцева, В.П. Чекурина. – М.: Медицина, 1969. – 216с.
137. Методы идентификации математических моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1982. – 191с.

138. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 1. Общие методы анализа биологических систем/ Под ред. И.И. Любимова. – К.: Вища шк., 1980. – 240с.

139. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 2. Методы синтеза алгебраических и вероятностных моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1981. – 312с.

140. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 3. Методы синтеза динамических моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1981. – 328с.

141. Методы математической биологии: в 8-ми книгах. Кн. 5. Информационные методы синтеза моделей биологических систем. – К.: Вища шк., 1982. – 240с.

142. Методы Монте-Карло в статистической физике/ К. Биндер, Д. Сиперли, Ж.-П. Ансен и др./ Под ред. К. Биндера. – М.: Мир, 1982. - 400с.

143. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Физматгиз, 1961.

144. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. – М.: Физматгиз, 1962.

145. Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике / Пер. с нем. и предисловие В.М. Ивановой.– М.: Финансы и статистика, 1982. – 272 с.: ил.

146. Налимов В.В. Логические основания планирования эксперимента / В.В. Налимов, Т.И. Голикова. – М.: Металлургия, 1976. – 128 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 126 – 128 (81 наим.).

147. Налимов В.В. Применение математической статистики при анализе вещества. – М.: Физматгиз, 1960. – 430с.

148. Налимов В.В. Статистические методы описания химических и металлургических процессов. – М: Металлургиздат, 1963. – 59с.

149. Налимов В.В. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов / В.В. Налимов, Н.А. Чернова. – М.: Наука, 1965. – 340 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 328 – 338 (204 наим.). – Предмет. указ.: с. 339 – 340. – Приложения: с. 309 – 327 (I. Элементы матричной алгебры. Симплексы. II. Планы дробных реплик).
150. Налимов В.В. Теория эксперимента. – М.: Наука, 1971. – 207с.
151. Неділько С.А. Математичні методи в хімії: підручник [для студ. хім. спеціал. вищ. навч. закладів] / Сергій Неділько; [Мін-во освіти інауки України; гриф: лист № 1 / 11-1536 від 13.04.2004 р.]. – К.: Либідь, 2005. – 256 с.: іл. – Завдання для самостійн. роботи та бібліогр. в кінці розд. – ISBN 966 – 06 – 03843.
152. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1968.
153. Нелинейная корреляция и регрессия / С.Н. Воловельская, А.И. Жилин, С.А. Кулиш, В.Б. Сивый. – К.: Техніка, 1971. – 130 с.
154. Нельсон Э. Радикально-элементарная теория вероятностей/ Пер. с англ. А.А. Рубана. – Новосибирск, 1995. – 111с.
155. Основы научных исследований/ В.И. Крутов, И.М. Грушко, В.В. Попов и др./ Под ред. В.И. Крутова, В.В. Попова. – М.: Высш. шк., 1989. – 400с.
156. Оценка и сравнение некоторых двухфакторных планов в планировании эксперимента/ Ю.В. Грановский, Н.С. Смирнова, Л.Н. Комисарова, В.И. Спицын// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.112-116.
157. Палеев Н.Р., Кельман И.М. Экстраполяция// БСЭ. – М.: Сов. энциклопедия, 1978. – 632с. – С. 18.
158. Перспективы медицинской генетики/ Под ред. И.П. Бочкова. – М.: Медицина, 1982. – 400с.
159. Петунин Ю.И. Приложение теории случайных процессов в биологии и медицине. – К.: Наукова думка, 1981. – 320с.

160. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т.1. – М.: Наука, 1976. – Т.1. – 456с; Т.2. – 576с.
161. Питербарг В.И. Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей. – М.: МГУ, 1988. – 174с.
162. Питмен Э. Основы теории статистических выводов/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 105с.
163. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шефер и др. / пер. с нем. Г.А. Фоминой, Н.С. Лецкого; под ред. Э.К. Лецкого. – М.: Мир, 1977. – 552 с. Перевод за изд.: Statistische Versuchsplanung und–auswertung in der Stoffwirt–shaft / von einem Autorenkollektiv Herausgeber: Klaus Hartmann, Eduard Lezki, Wolgang Schäfer. – VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1974.: ил., табл. – Библиогр. в конце гл. – Мат. приложения: с. 516 – 540. – Предмет. указатель: с. 541 – 547.
164. Планирование эксперимента при получении отверженных лаковых покрытий на основе хлорсульфированного полиэтилена/ Г.Я. Лозовик, Е.В. Маркова, А.А. Донцов, И.Я. Клинов// Лакокрасочные материалы и их применение. - №6.– 1967.
165. Планирование эксперимента. Сборник первого совещания по планированию. – М.: Наука, 1966.
166. Плохинский Н.А. Биометрия. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.
167. Поверхности вращения// БСЭ. – Т.20. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 608с. – С. 72.
168. Позняк Э.Г. Дифференциальная геометрия// БСЭ. – Т.8. - М.: Сов. энциклопедия, 1972. – 592с. – С. 330-332.
169. Позняк Э.Г. Поверхностей теория// БСЭ. – Т.20. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 608с. – С. 71-72.

170. Прикладная статистика/ С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин/ Под ред. С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1980. – 607с.
171. Приложение математических моделей к анализу эколого-экономических систем/ Под ред. И.А. Башалханова, В.А. Батурина. – Новосибирск: Наука, 1988. – 215с.
172. Применение латинских прямоугольников и кубов в планировании эксперимента при поиске новых ингибиторов коррозии/ А.Х. Альхамедан, Е.В. Маркова, В.И. Скрипниченко, М.Ф. Герасимова// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.186-191.
173. Применение математико-статистического метода при оптимизации процесса вулканизации эластомеров солями насыщенных кислот/ А.А. Донцов, Е.В. Маркова, В.Э. Михлин, Б.А. Догадкин// Каучук и резина, 1967. - №10.
174. Применение математической статистики при исследовании процесса формования и вытягивания полипропиленового волокна/ Н.С. Иванов, Е.Н. Марина, Д.Ф. Фильберт, С.Я. Межирова, Ю.П.Адлер// Карбоцепные волокна. – М.: Химия, 1966.
175. Проблемы анализа биологических систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 128с.
176. Проблемы планирования эксперимента. Сборник статей. – М.: Наука, 1969.
177. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей. Основные положения. Предельные теоремы. Случайные процессы.- М.: Наука, 1987. – 397с.
178. Пуанкарэ Жюль Анри// БСЭ. – Т.21. – М.: Сов. энциклопедия, 1975. – 440 с. – С.211.
179. Райзер Г.Д. Комбинаторная математика. – М.: Мир, 1966.

180. Рего К.Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений: Справочное пособие. – К.: Техніка, 1987. – 128 с.: ил. – Табл. 66. – Библиогр.: С.126 (12 назв.).
181. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высш. шк., 1966. – 608с.
182. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Инлитиздат, 1963.
183. Рокицкий П.Ф. Биологическая статистика. – Минск, 1967.
184. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. – М.: Наука, 1971.
185. Румшинский Л.З. Элементы теории вероятностей. – М.: Наука, 1976.
186. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций/ Под ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1970. – 656с.
187. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. –М.: Наука, 1968.
188. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: Наука, 1970. – 304с.
189. Свирежев Ю.М., Пасеков В.П. Основы математической генетики. – М.: Наука, 1982. – 512с.
190. Секей, Габор. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике/ Пер. с англ. В.В. Ульянова; под ред. В.В. Сазонова. – М.: Мир, 1990. – 240с.
191. Сепетлиев Д. Статистические методы в научных медицинских исследованиях. – М., 1968.
192. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера / Виталий Петрович Сигорский. – 2-е изд., стереотип. – К.: Техніка, 1977. – 768 с.: – ил., табл. – Библиогр. в конце гл. – Предмет. указ.: с. 752 – 764.

193. Сиренко Г.А. Основы научных исследований: Программа и методические указания для химиков-технологов. – Хмельницкий: Хмельн. технол. ин-т, 1979. – 34с.
194. Сиренко Г.А., Мандзюк И.А. Оптимизация состава эпоксидных композиций// Пластические массы. – 1977. - №8. – С.25-26.
195. Сіренко Г.О. Методи оцінок впливу факторів на функції відгуку та процедури відсіювання параметрів оптимізації при вирішенні багатопараметричних завдань у матеріалознавстві / Г.О. Сіренко, О.В. Кузишин, О.Г. Сіренко, Л.Я. Мідак, Л.М. Солтис // Фізика і хімія твердого тіла. – 2009. – Т. 10. – № 2. – С.423-439: іл. 2, табл. 10. – Бібліогр.: с. 437-438 (26 назв).
196. Сіренко Г.О., Мідак Л.Я. Про один із підходів до оцінки параметрів трибологічної системи з титановою складовою// Проблеми трибології. – 2002. - № 3, 4. – С. 36-46.
197. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 6. Статистичні характеристики стадій розвитку сосни кедрової європейської (Pinus cembra L.) / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XII. – С. 176-188: іл. 3, табл. 7. – Бібліогр.: с. 187 (12 назв).
198. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 3. Статистичні характеристики. Кореляційний та реґресійний аналізи / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин, Л.Я. Мідак // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XI. – С. 76-88: іл. 4, табл. 7. – Бібліогр.: с. 89 (15 назв).
199. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 4. Розподіл особин сосни кедрової європейської (Pinus cembra L.) та ялини звичайної (Picea abies) за нормальним законом Ґаусса / О.Г. Сіренко,

О.В. Кузишин, Л.Я. Мідак // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XI. – С. 90-98: іл. 1, табл. 1. – Бібліогр.: с. 97 (16 назв).

200. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 5. Статистичні характеристики. Дисперсійний аналіз: статистична рівність ряду математичних сподівань особин сосни кедрової європейської (Pinus cembra L.) та ялини звичайної (Picea abies) / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XI. – С. 98-118: іл. 8, табл. 13. – Бібліогр.: с. 117 (12 назв).

201. Сіренко О.Г. Стан популяцій сосни кедрової європейської (Pinus cembra L.) в українських Карпатах: екологічна приуроченість деревостанів (загальний та кореляційний аналіз) / О.Г. Сіренко, О.В. Кузишин, Л.Я. Мідак // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. XII. – С. 188-208: іл. 6, табл. 9. – Бібліогр.: с. 207 (32 назви).

202. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 1. Постановка завдання / О.Г. Сіренко , О.В.Кузишин // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. X. – С. 88-95: іл. 4. – Бібліогр.: с. 94 (16 назв).

203. Сіренко О.Г. Моделі розподілу особин на пробних площах: 2. Статистичні характеристики. Дисперсійний аналіз (статистична рівність ряду ґенеральних дисперсій) / О.Г.Сіренко , О.В. Кузишин // Вісник Прикарп. ун-ту ім. Василя Стефаника. Сер. Біологія. – Івано-Франківськ: Гостинець; Видавець Третяк І.Я., 2008. – Вип. X. – С. 95-113: іл. 1, табл. 6. – Бібліогр.: с. 112 (34 назви).

204. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів. – К.: Либідь, 1990. – 167с.

205. Смирнов Н.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н.В. Смирнов, И.В. Дунин-Барковский. – М.: Наука, 1969. – Табл. II.

206. Смуров А.В. Статистические методы в исследовании пространственного размещения организмов// Методы почвенно-зоологических исследований. – М.: Наука, 1975. – С.217-240.

207. Снедекор Д.У. Статистические методы в применении к исследованиям в сельском хозяйстве и биологии. – М., 1961.

208. Соболь И.М. Метод Монте-Карло. – М., 1972.

209. Соколов Д.К. Математическое моделирование в медицине. – М, 1974.

210. Солтис М.М., Закордонський В.П. Теоретичні основи процесів хімічної технології. – Львів: Видавн. центр Львів. нац. ун-ту імені Івана Франка, 2003. – 430с.: іл. (80 рис.). – 36 табл. – 1.3. Методи математичної статистики: С.24-46. – 6.6. Дослідження хіміко-технологічного процесу з використанням методів кореляційного та реґресійного аналізу: С. 381-405. – Додатки. Статистичні табл.: С.406-410 (4 табл.). – Бібліогр.: С. 413-415 (40 назв). – Предмет. покажчик: С.416-423. – Умов. познач.: С.424-426. – ISBN 966-613-161-7.

211. Сопряжонные гиперболы// БСЭ. – Т.24(I). – М.: Сов. энциклопедия, 1976. – 608с. – С. 190.

212. Спиридонов А.А. Планирование эксперимента: Учебное пособие / А.А. Спиридонов, Н.Г. Васильев. – Свердловск: Изд-во Урал. политехн. ин-та, 1975. – 150 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 147-148 (23 наименов.).

213. Спиридонов В.П., Лопаткин А.А. Математическая обработка физико-химических данных. – М.: МГУ, 1971.

214. Справочник по прикладной статистике/ Под ред. Э.Ллойда, У. Ледермана/ Пер. с анг. под ред. Ю.М. Тюрина. – М.: Финансы и статистика, 1980. – Т.1. – 510с.
215. Стент Г., Кэлиндер Р. Молекулярная генетика/ Пер. с англ. Ю.Н. Зографа, Т.С. Ильиной, В.Г. Никифорова. – М.: Мир, 1981. – 648с.
216. Степнов М.Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний / Михаил Никитович Степнов. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 229-230 (36 назв.).
217. Стюарт Иэн. Тайны катастрофы/ Пер. с фр. – М.: Мир, 1987. – 76с.
218. Судьина Е.Г. Вероятность в биологии. – К.: Наук. думка, 1985. -96с.
219. Сытник В.Ф. Основы научных исследований . – К.: Вища шк., 1978. – 184с.
220. Таблицы планов эксперимента для факторных и полиноминальных моделей/ В.З. Бродский, Л.И. Бродский, Т.И. Голикова и др. – М.: Металлургия, 1982. – 752с.
221. Теория вероятностей и математическая статистика: Респ. межвед. науч. сб. – К.: Вища шк., 1987. – Вып. 36. – 136с.; 1987. – Вып. 37. – 133с.; 1988. – Вып.38. – 131с.
222. Теория подобия и размерностей. Моделирование/ П.М. Алабужев, В.Б. Геронимус, П.М. Минкевич, Б.А. Шеховцов. – М.: Высш. шк., 1968. – 208с.
223. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К.: ТВ і МС, 194. – Вип. 50. – 143с.; 1994. – Вип.51. – 130с.
224. Терентьев П.В., Ростова Н.С. Практикум по биометрии. – Л., 1977.
225. Тихомиров В.Б. Планирование и анализ эксперимента / Владислав Борисович Тихомиров. – М.: Легкая индустрия, 1974. – 264 с.: ил., табл. – Приложение: с. 255-257 (4 табл.). – Библиогр.: с. 258-261 (99 наименов.).

226. Ткаченко Н.А. Математические методы и АСУ в бытовом обслуживании. – К.: Техніка, 1980. – 112с.

227. Уайлд Д. Дж. Методы поиска экстремума. Серия: Теоретические основы технической кибернетики / Дуглас Дж. Уайлд; пер. с англ. А.Н. Кабалевского, Е.П. Маслова, В.Д. Спиридонова; под ред. А.А. Фельдбаума. – М.: Наука, 1967. – 268 с. Перевод за изд.: Optimum seeking methods / Douglass J. Wilde. – Department of chemical Enginnering Stanford University. – Prentice-Hall, Inc. – Englewood Cliffs, N.J., 1964.: ил., табл. – Упражнения в конце гл. – Библиогр.: в подстроч. примеч. – Предмет. указатель: с. 265 – 267.

228. Уилсон Р. Введение в теорию графов / Р.Дж. Уилсон; пер. с англ. И.Г. Никитиной; под ред. Г.П. Гаврилова. – М.: Мир, 1977. – 208 с. – Перевод за изд.: Introduction to Graph Theory / Robin J. Wilson. – Oliver and Boyd Edinburg, 1972.: ил. – Упр. после параграф. – Предмет. указатель: с. 202 – 205. – Приложение (табл.): с. 200. – Библиогр.: с. 201 (16 назв.).

229. Урбах В.Ю. Статистический анализ в биологических и медицинских исследованиях. – М., 1975.

230. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента (планирование регрессионных экспериментов): монография / Валерий Вадимович Федоров. – М.: Наука, 1971. – 312 с.: ил., табл. – Библиогр.: с. 309 – 312 (79 наим.).

231. Федорова Г.В. Практикум з біогеохімії для екологів: Навчальний посібник. – К.: КНТ, 2007. – 288 с.: іл. (34 рис.). – Табл. 32. – Ч.І. Розділ 2. Сучасні методи аналізу в біогеохімії: с. 31-87. – Запитання для контролю знань: після гл. – Додатки: с. 263-266. – Бібліогр.: с.267-270 (55 назв). – Предмет. покажчик: с.271-281. – ISBN 966-373-054-4.

232. Филаретов Г.Ф. К вопросу о построении нелинейной регрессионной модели по данным пассивного эксперимента// Проблемы планирования эксперимента. – М.: Наука, 1969. – С.12-19.
233. Финни Д. Введение в теорию планирования экспериментов. – М.: Мир, 1970.
234. Флейс Дж. Статистические методы для изучения таблиц, долей и пропорций/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 319с.
235. Фогель Ф., Мотульски А. Генетика человека. В 3-х томах. – Ч.1. История, хромосомы человека, формальная генетика/ Пер. с англ. Т.Ю. Переслени, С.В. Агеева, К.Н. Гринберга. – М.: Мир, 1989. – 312с.
236. Фогель Ф., Мотульски А. Генетика человека. В 3-х томах. – Ч.2. Действие генов, мутации, популяционная генетика/ Пер. с англ. А.Г. Имашевой, С.Л. Мехедова, Е.Я. Тетушкина. – М.: Мир, 1990. – 378с.
237. Фогель Ф., Мотульски А. Генетика человека. В 3-х томах. – Ч.3. Эволюция человека, генетика поведения, практические аспекты/ Пер. с англ. С.В. Агеева, Е.Я. Тетушкина, А.Н. Чепковой. – М.: Мир, 1990. – 366с.
238. Фоменко А.Т. Статистическая хронология. – М.: Знание, 1990. – 46с.
239. Фомин С.В., Беркинблит М.Б. Математические проблемы в биологии. – М.: Наука, 1973.
240. Хайруллин Р.Х. Математические методы в генетике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1988. – 186с.
241. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: Иностранная литература, 1956.
242. Хан Г., Шапиро С. Статистические методы в инженерных задачах. – М., 1969.
243. Хеттманспергер Т. Статистические выводы, основанные на рангах/ Пер. с англ. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 334с.

244. Хикс Ч. Основные принципы планирования эксперимента / Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 406 с.
245. Химмельблау Д. Анализ процессов статистическими методами/ Пер. с англ. В.Д. Скаржинского/ Под ред. В.Г. Горского. – М.: Мир, 1973. – 957с.
246. Холл М. Комбинаторный анализ. – М.: Инлитиздат, 1963.
247. Хомяков П.П., Адлер Ю.П., Налимов В.В. Выявление факторов, влияющих на скорость хлорирования титановых шлаков в расплаве// Заводская лаборатория. – 1963. – Т.29, №1.
248. Худсон Д. Статистика для физиков. – М.: Мир, 1970.
249. Цыпкин Я.З. О восстановлении характеристики функционального преобразования по случайно наблюдаемым точкам// Автоматика и телемеханика. – 1965. - №11.
250. Чернышев М.К., Гаджиев М.Ю. Математическое моделирование иерархических систем с приложениями к биологии и экономике. – М.: Наука, 1983. – 192с.
251. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1987. – 240с.
252. Шакалис В.В. Моделирование технологических процессов. – М.: Машиностроение, 1973. – 136с.
253. Шведков Е.Л. Элементарная математическая статистика в экспериментальных задачах материаловедения. – К.: Наукова думка, 1975. – 110с.
254. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. – М.Наука, 1972.
255. Шеффе Г. Дисперсионный анализ/ Пер. с англ. – М.: Физматгиз1963. – 628с.
256. Шкільняк С.С. Математична логіка. Основи теорії алгоритмів: Навч. посібник/ С.С. Шкільняк. – К.: Видавничий Дім «Персонал», 2009. – 280с. – Бібліогр. в кінці частин.
257. Экстремум// БСЭ. – М.: Сов. энциклопедия, 1978. – 632с. – С. 19.

258. Эллиот Р. Стохастический анализ и его приложения/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 351с.
259. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. – М.: Мир, 1968.
260. Box G.E.P., Behnken D.W. Simplexsum Designs: A Class of Second Order Rotatable Designs Derivable from Those of First Order// Annals of Mathematical Statistics. – 1960. – V.31. – N4.
261. Box G.E.P., Behnken D.W. Some New Three Level Designs for the Study of Quantitative Variables// Technometrics. – 1960. – V.2, N4.
262. Connor W.S., Young S. Fractional Factorial Designs for Experiments with Factors of two and three Levels// National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series. – 1961. – 58.
263. Davies O.Z., Hay W.A. The construction and uses of fractional factorial designs in industrial research// Biometrics. – 1950,– N6.
264. Federer W.T. Experimental Design. – N.Y.: Macmillan Comp., 1955.
265. Fisher R.A. The Design of Experiments. – Edinburg-London: Oliver and Boy, 1960.
266. Fisher R.A. Yates F. Statistical tables for biological, agricultural and medical research. – Edinburg-London: Oliver and Boy, 1957.
267. Hartley H.O. Smallest Composite Designs for Quadratic Response Surface// Biometrics. – 1959. – V.15, N1.
268. Robbins H., Monro S. A stochastic approximation method. – Ann. Math. Statist, 1951. – Vol.25, N1.
269. Spendley W., Hext G.R., Himsworth F.R. Sequential Application of Simplex Designs in Optimization and Evolutionary Operation// Technometrics. – 1962. – V.4, N4.